
TD 0 : Matrices

Exercice 1

Calculer, lorsque c'est possible, $3A$, $2B$, A' , B' , $A + B$, AB et BA .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Calculer, lorsque c'est possible, A' , B' , $A + B$, AB et BA .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Calculer, lorsque c'est possible, $A + B$, AB et BA .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

Soient les vecteurs u , v et w de \mathbb{R}^4 ,

$$u = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les normes euclidiennes de ces trois vecteurs.
2. Calculer les produits scalaires entre u et v (noté $\langle u, v \rangle$), puis $\langle u, w \rangle$ puis $\langle v, w \rangle$.
3. Calculer lorsque c'est possible $u'v$, uv' et uv .
4. Calculer lorsque c'est possible $u'w$, $w'u$ et uw .
5. Calculer lorsque c'est possible $v'w$, vw' .

Exercice 5

Nous notons $\mathbb{1}_n$ le vecteur de taille n dont toutes les coordonnées valent 1. Considérons la matrice A et le vecteur $\mathbb{1}_3$ et calculer, lorsque c'est possible, $A + \mathbb{1}$, $A\mathbb{1}$, $\mathbb{1}A$, $\mathbb{1}'A$ et $(1/3)\mathbb{1}'A$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6

Soit X une matrice de taille $n \times p$. Nous notons la première colonne de X , X_1 , la seconde X_2 et ainsi de suite. La matrice X peut donc s'écrire $X = (X_1|X_2|\dots|X_p)$.

1. Comment faites-vous pour avoir le vecteur des moyennes des colonnes d'une matrice X ? des lignes d'une matrice X ?
2. Comment faites-vous pour centrer une matrice X (enlever à chaque colonne sa moyenne)?

Exercice 7

Soit X une matrice de taille $n \times p$. Nous notons la première colonne de X X_1 , la seconde X_2 et ainsi de suite. La matrice X peut donc s'écrire $X = (X_1|X_2|\dots|X_p)$. Nous notons également $X_{(i)}$ la matrice X privée de sa $i^{\text{ème}}$ ligne et x_i la transposée de sa $i^{\text{ème}}$ ligne.

1. Quelle est la taille de la matrice $X'X$?
2. Quel est le terme général de la matrice $X'X$?
3. La matrice $X'X$ est-elle symétrique?
4. Quelle est la taille de la matrice $X'_{(i)}X_{(i)}$?
5. Quelle est la taille de x_i ?
6. Montrer que

$$X'X = X'_{(i)}X_{(i)} + x_i x_i'$$

Exercice 8

La matrice X vaut $X = (\mathbb{1}_?|X_2|X_3)$. Nous ne connaissons pas le nombre de lignes de cette matrice. Nous avons obtenu les résultats suivants :

$$X'X = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ ? & 9.3 & 5.4 \\ ? & ? & 12.7 \end{pmatrix} \quad (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1428 & -0.0607 \\ 0 & -0.0607 & 0.1046 \end{pmatrix}.$$

1. Donner les valeurs manquantes.
2. Que vaut n , le nombre de lignes de X ?
3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire empirique entre X_2 et X_3 .

Exercice 9

Trouver deux matrices A et B telles que l'on ait à la fois :

$$2A - 3B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A - 2B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 10

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & i & i \\ i & 1 & -i \\ i & -i & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 10 & 15 \\ 4 & 10 & 20 & 35 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & 6 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 11

Montrer, avec le moins de calculs possible, que :

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 84 & 8 & 4 \\ 35 & 3 & 5 \\ 62 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 0 & 8 & 5 \\ 2 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 6 \end{vmatrix} \text{ est divisible par } 17, \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix} = -1487600$$

Exercice 12

Montrer que la matrice A est inversible et calculer A^{-1} lorsque :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13

Je sais que $X'X\beta = X'y$. Comment faites-vous pour trouver β ? Pouvez-vous trouver β avec les matrices suivantes :

$$X'X = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 15 & 4 \\ 0 & 15 & 30 & 10 \\ 0 & 4 & 10 & 40 \end{pmatrix}, \quad X'y = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 40 \\ 80 \end{pmatrix}.$$

On admettra que

$$\begin{pmatrix} 20 & 15 & 4 \\ 15 & 30 & 10 \\ 4 & 10 & 40 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{13720} \begin{pmatrix} 1100 & -560 & 30 \\ -560 & 784 & -140 \\ 30 & -140 & 375 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14

Soit M une matrice symétrique régulière de taille $p \times p$ et u et v deux vecteurs de taille p . Nous supposons que $u'M^{-1}v \neq -1$, alors nous avons l'inverse suivante

$$(M + uv')^{-1} = M^{-1} - \frac{M^{-1}uv'M^{-1}}{1 + u'M^{-1}v}.$$

Exercice 15

En calculant de deux façons différentes le produit $D\Delta$ des deux déterminants

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} \text{ et } \Delta = \begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix},$$

démontrer que $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (bx - ay)^2$.

Exercice 16

Parmi les matrices suivantes, quelles sont celles qui sont inversibles? Calculer leur matrice inverse.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix} & \text{b) } & \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix} & \text{c) } & \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 0 \\ 4 & -8 & 0 \end{pmatrix} & \text{d) } & \begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ \text{e) } & \begin{pmatrix} 9 & 22 & -6 \\ -1 & -4 & 1 \\ 8 & 16 & -5 \end{pmatrix} & \text{f) } & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \text{g) } & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \text{h) } & \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 3 & 2 & c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 17

Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$\begin{aligned}
 a) & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 8 & 0 \end{pmatrix} & b) & \begin{pmatrix} a & -a^2+1 & -a^2+a-1 \\ -a+2 & a^2+1 & a^2-a+1 \\ a-2 & a^2-1 & a^2+a-1 \end{pmatrix} & c) & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 d) & \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} & e) & \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Exercice 18

Ecrire sous forme matricielle les systèmes linéaires suivants. Résoudre, lorsque c'est possible, en discutant selon les valeurs des paramètres m , p , a , b , c et d .

$$\begin{aligned}
 a) & \begin{cases} x + my + z = 1 \\ mx + y + (m-1)z = m \\ x + y + z = m+1 \end{cases} & b) & \begin{cases} mx + y + z = a \\ x + my + z = b \\ x + y + mz = c \end{cases} \\
 c) & \begin{cases} 2x - 2y + z = 3m-2 \\ -x + my + 2z = 2m \\ x + 2my - 3z = 0 \end{cases} & d) & \begin{cases} x + y + (2m-1)z = 1 \\ mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 3(m+1) \end{cases} \\
 e) & \begin{cases} (m+2)x & = a \\ -2mx + 2y - z + mt & = b \\ -2mx + my + (m+1)z + mt & = c \\ 2x - 2y + (m+2)z & = d \end{cases} & f) & \begin{cases} a^2x + ay + z = 1 \\ ax + aby + bz = ab \\ a^2x + aby + z = a^2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Exercice 19

m désigne un paramètre réel. On note A la matrice :

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ m-1 & -2 & m-3 \\ -1 & -1 & m-1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le rang de A (en discutant selon les valeurs de m)
2. On suppose m choisi de telle façon que le rang de A soit 3. Calculer, en fonction de m , les 5 termes de la matrice inverse A^{-1} qui occupent la première colonne et la première ligne de A^{-1} .

TD 1 : Bases et applications

Exercice 1 (sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^2)

Parmi les ensembles suivants, déterminer ceux qui sont des espaces vectoriels :

- $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 0\}$;
- $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 1\}$;
- $A_3 = \{(a + b, a - b) | a, b \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 2 (sous-espaces vectoriels de $\text{Fonct}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$)

On rappelle que $\text{Fonct}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Parmi les sous-ensembles suivants de $\text{Fonct}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, lesquels forment des sous-espaces vectoriels ?

- $F_1 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | f \text{ est paire}\}$;
- $F_2 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | f \text{ est impaire}\}$;
- $F_3 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{Z}, f(x) = 0\}$;
- $F_4 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{Z}, f(x) = 1\}$;
- $F_5 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | f \text{ est bornée}\}$.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel. Soit (u_1, \dots, u_4) une famille libre de E .

1. Que savez-vous sur la dimension de E ?
2. Les familles suivantes sont-elles libres :

$$(u_1, u_2, 0, u_4), \quad (u_1, u_2, u_3 + u_4, u_4), \quad (u_1, u_2, u_3), \quad (u_1, u_2 + u_3, u_4).$$

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel. Soit (u_1, \dots, u_4) une famille génératrice de E .

1. Que savez-vous sur la dimension de E ?
2. Les familles suivantes sont-elles génératrices :

$$(u_1, u_2, u_3, 0, u_4), \quad (u_1, u_2, u_3 + u_4, u_4)$$

Exercice 5

Dans \mathbb{R}^3 , déterminer si les familles sont génératrices, libres, liées, forment des bases. Si la famille est une base, calculer les coordonnées des vecteurs de la base canonique dans cette nouvelle base :

$$u_1 = (1, 2, 3)', u_2 = (4, 0, -1)' \text{ et } u_3 = (3, 7, 9)',$$

puis mêmes vecteurs u_1 et u_2 et $u_3 = (-1, 14, 19)'$.

Exercice 6

Soit f une application linéaire, montrer que : $(\ker f = \{0\}) \iff (f \text{ est injective})$.

Exercice 7

Soient a, b, c, d , des scalaires et f une application :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1. (a) Montrer que f est une application linéaire.
 (b) Ecrire l'image par f des vecteurs e_1, e_2 , base canonique de \mathbb{R}^2 .
 (c) Calculer l'image par f d'un vecteur quelconque de \mathbb{R}^2 .
2. Soit f_1 , l'application linéaire où $a = b = c = d = 1/2$.
 (a) Calculer $\ker f_1$, montrer que $f_1 \circ f_1 = f_1$.
 (b) Donner la nature de f_1 et l'ensemble des points invariants par f_1 .
 (c) Soit M un point de \mathbb{R}^2 de coordonnées (x, y) , donner une construction géométrique du point M_1 de coordonnées $f_1(x, y)$.
3. Soit f_2 , l'application linéaire où $a = b = c = d = 1$. Donner une construction simple de cette nouvelle application linéaire (penser aux composés d'AL).
4. Soit f_3 , l'application linéaire où $a = d = 0, b = 1$ et $c = -1$.
 (a) Calculer $\ker f_3$, qu'en déduisez-vous ?
 (b) Donner une construction simple de cette nouvelle application linéaire.
5. Soit f_4 , l'application linéaire où $a = 3/4, b = -1/4, c = -3/4$ et $d = 1/4$.
 (a) Déterminer le noyau, l'image et l'ensemble des invariants de f_4 .
 (b) Calculer $f_4 \circ f_4$, qu'en déduit-on ?
 (c) Déterminer $M_{c,c}^2(f_4), M_{c,c}^3(f_4)$ et $M_{c,c}^n(f_4)$, expliquer.
6. Sur un même graphique dessiner le point M et les points M_1, M_2, M_3 et M_4 images respectives du point M par les applications f_1, f_2, f_3 et f_4 .

Exercice 8

Soit f l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) = \left(\frac{3x - y + 3}{4}, \frac{-3x + y + 3}{4} \right). \end{aligned}$$

Est-ce une application linéaire ?

Exercice 9

Soit \mathbb{R}^2 l'espace vectoriel muni de la base canonique (\vec{e}_1, \vec{e}_2) . Soit f la rotation de centre $O(0, 0)$ et d'angle $\pi/4$ ($f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une application linéaire). Ecrire la matrice A de f dans la base canonique. Déterminer le vecteur \vec{y} image par f du vecteur \vec{x} avec $\vec{x} = 9/4\vec{e}_1 + 2/3\vec{e}_2$.

Exercice 10

Soit, dans \mathbb{R}^3 , les systèmes de vecteurs suivants :

$$\begin{aligned} B : \quad \vec{e}_1 &= (1, 1, 0)' \quad \vec{e}_2 = (1, -2, 1)' \quad \vec{e}_3 = (0, 2, 1)' \\ B' : \quad \vec{e}'_1 &= (3, 2, 2)' \quad \vec{e}'_2 = (0, -3, -1)' \quad \vec{e}'_3 = (2, -3, 0)' \end{aligned}$$

1. Montrer que chacun d'eux est une base de \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer la matrice de passage de B à B' .
3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3 \quad f(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 + 3\vec{e}_1 \quad f(\vec{e}_3) = -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_3 + \vec{e}_2.$$

Quelle est la matrice représentant f dans la base B' ?

 TD 2 : Diagonalisation

Exercice 1

Considérons la matrice A de l'application linéaire f de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^4 dans la base canonique de \mathbb{R}^4 .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Considérons une base $\mathcal{B} = (e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$ de \mathbb{R}^4 . Donnez la matrice de l'application linéaire dans la base \mathcal{B} en donnant clairement les matrices de passages.

Exercice 2

Soit \mathbb{R}^2 l'espace vectoriel muni de la base canonique $\mathcal{B}_0 = (i_0, j_0)$. Soit $\mathcal{B}_1 = (i_1, j_1)$ une autre base de \mathbb{R}^2 obtenue par rotation de 30 degrés de \mathcal{B}_0 . Soit f la symétrie orthogonale relativement à la droite Δ de vecteur directeur i_1 ($f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une application linéaire).

1. A partir de la Figure 1, écrire la matrice A_0 de f dans la base \mathcal{B}_0 .

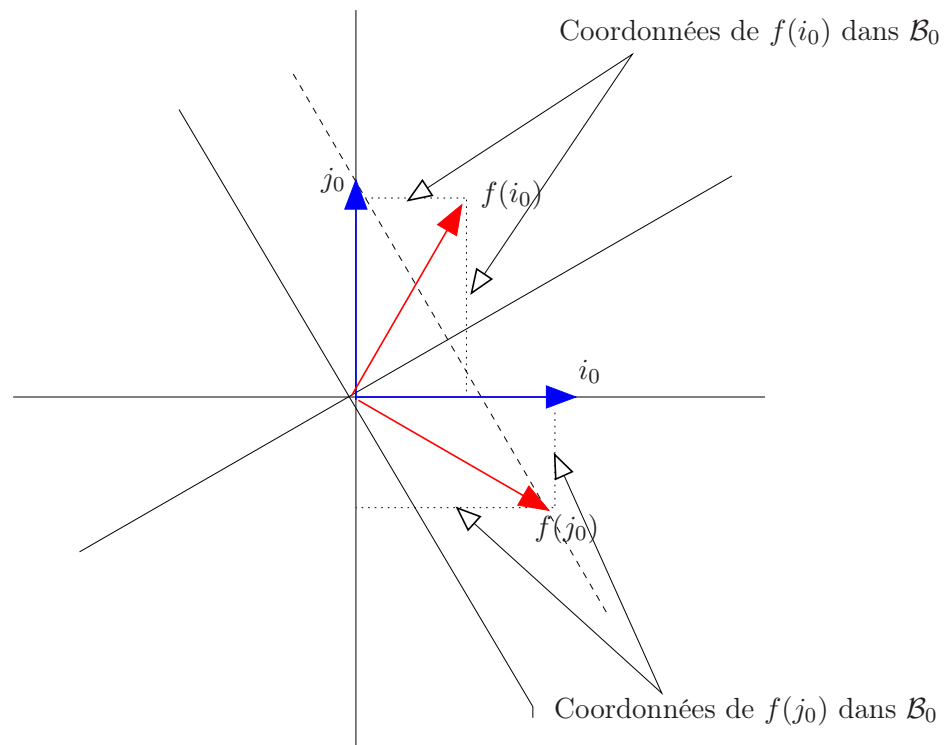


FIG. 1 – Représentation des bases \mathcal{B}_0 et \mathcal{B}_1 .

2. Calculer les coefficients de la matrice de passage P de l'ancienne base \mathcal{B}_0 à la nouvelle base \mathcal{B}_1 . Recalculer A_0 à l'aide de cette matrice de passage.

Exercice 3

Déterminer les valeurs propres λ et les sous-espaces propres E_λ associés (les vecteurs propres seront normés) des matrices suivantes. Dans chaque cas, on précisera la dimension des sous-espaces propres et on donnera, quand ce sera possible, la matrice diagonale ainsi qu'une base dans laquelle la matrice considérée est diagonale.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

Calculer A^n pour les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 2/3 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

Soit f une application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ vaut :

$$A = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Que vaut $f(e_1)$ en fonction de e_1, e_2, e_3 .
2. Calculer la déterminant de A .
3. Chercher les valeurs propres de A et les vecteurs propres associés.
4. Expliquer pourquoi la matrice est diagonalisable. Donner une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice est diagonale. Indiquer sa forme diagonale dans cette base (notée \mathcal{B}').
5. Ecrire la matrice de passage P de la base canonique à la nouvelle base.
6. Donner la relation liant $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$ à P et $M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}'}(f)$. Vérifier cette relation.

Exercice 6

Soit f une application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 , dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est

$$M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculez les valeurs propres de $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$.
2. Calculez les vecteurs propres de $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$ (de norme 1). $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$ est-elle diagonalisable ?
3. Donnez une base \mathcal{B}' de \mathbb{R}^3 dans laquelle $M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}'}(f)$ est diagonale calculez $M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}'}(f)$.
4. Calculez $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)^n$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 7

Triangulariser la matrice E de l'exercice 3.

TD 3 : Diagonalisation (suite)

Exercice 1 (Système différentiel linéaire)

Vous allez résoudre le système différentiel aux deux fonctions inconnues $x(t)$ et $y(t)$ suivant :

$$\begin{cases} x' = 5x + 16y - 4e^t \\ y' = -2x - 7y + e^t \end{cases}$$

Vous pouvez écrire ce système sous forme matricielle

$$X' = AX + T \quad (1)$$

avec

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 16 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -4e^t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

- Déterminez les valeurs propres et les vecteurs propres de A . Vous rangerez les valeurs propres dans l'ordre croissant (en premier, la plus petite) et vous choisirez des vecteurs propres dont la première coordonnée vaut 1.
- Donnez la matrice diagonale D en précisant la base et les matrices de passage P et P^{-1} .
- Grâce aux résultats obtenus à la question 2), donnez la décomposition de A et remplacez A par cette décomposition dans l'équation (1).
- Multipliez à gauche par P^{-1} l'équation trouvée lors de la question 3). Soit V une matrice quelconque, vous allez noter $P^{-1}V$ par \tilde{V} . Les coefficients de \tilde{V} sont les coefficients de V surmontés du \sim .
- Vérifiez que $P^{-1}T$ vaut $\tilde{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4e^t \end{pmatrix}$. Vous avez donc maintenant

$$\tilde{X}' = D\tilde{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4e^t \end{pmatrix}.$$

- Résoudre l'équation différentielle $\tilde{x}' = -3\tilde{x}$.
- Résoudre l'équation différentielle $\tilde{y}' = \tilde{y} - 4e^t$.
- Vous venez de calculer \tilde{X} , trouvez X .

Bravo, vous venez de résoudre un système différentiel !

Exercice 2 (Système dynamique linéaire)

On considère deux suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ telles que $u_0 = v_0 = 1$ et satisfaisant, pour tout $n \geq 0$, le système de relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 4u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -6u_n - 4v_n \end{cases}$$

En vous inspirant du problème précédent (écriture sous forme matricielle, diagonalisation, etc.), déterminez les suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$.

Exercice 3 (Projection et symétrie par rapport à un plan)

On considère un endomorphisme f de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A .
2. En déduire une matrice de passage P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
3. Calculer A^2 . Qu'en déduisez-vous sur f ?
4. Dans un repère orthonormé de \mathbb{R}^3 , représenter $\ker(A)$ et $\text{Im}(A)$.
5. Soit M un point de l'espace \mathbb{R}^3 . Construire géométriquement $f(M)$.
6. On considère maintenant un endomorphisme g dont la matrice dans la base canonique est :

$$B = 2A - I_3 = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de B .

7. En déduire une matrice de passage Q et une matrice diagonale Δ telles que $B = Q\Delta Q^{-1}$.
8. Calculer B^2 . Qu'en déduisez-vous sur g ?
9. Dans un repère orthonormé de \mathbb{R}^3 , représenter l'ensemble des vecteurs v invariants par g . Représenter aussi l'ensemble des vecteurs v tels que $g(v) = -v$.
10. Soit M un point de l'espace \mathbb{R}^3 . Construire géométriquement $g(M)$.

Exercice 4 (Projection et symétrie par rapport à une droite)

On considère un endomorphisme f de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A .
2. En déduire une matrice de passage P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
3. Calculer A^2 . Qu'en déduisez-vous sur f ?
4. Dans un repère orthonormé de \mathbb{R}^3 , représenter $\ker(A)$ et $\text{Im}(A)$.
5. Soit M un point de l'espace \mathbb{R}^3 . Construire géométriquement $f(M)$.
6. On considère maintenant un endomorphisme g dont la matrice dans la base canonique est :

$$B = 2A - I_3 = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}.$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de B .

7. En déduire une matrice de passage Q et une matrice diagonale Δ telles que $B = Q\Delta Q^{-1}$.
8. Calculer B^2 . Qu'en déduisez-vous sur g ?
9. Dans un repère orthonormé de \mathbb{R}^3 , représenter l'ensemble des vecteurs v invariants par g . Représenter aussi l'ensemble des vecteurs v tels que $g(v) = -v$.

10. Soit M un point de l'espace \mathbb{R}^3 . Construire géométriquement $g(M)$.
11. En remarquant que cette matrice B est l'opposée de la matrice B de l'exercice précédent, retrouver ce point $g(M)$.

Exercice 5 (Chaîne de Markov)

Un petit scarabée se déplace sur un triangle, dont les sommets sont numérotés $\{1, 2, 3\}$. A l'instant n , s'il est au sommet i , il va vers le sommet j avec la probabilité p_{ij} , où il se retrouve à l'instant $(n+1)$. Si $i = j$, il reste sur place. La matrice de transition $P = [p_{ij}]_{1 \leq i, j \leq 3}$ est donnée par :

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

1. Diagonaliser la matrice P .
2. On admet que la probabilité d'être à l'instant n au sommet j sachant que le scarabée est initialement (c'est-à-dire à l'instant 0) au sommet i est donnée par le terme (i, j) de la matrice P^n . Calculer P^n .
3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P^n$. Interpréter le résultat.
4. Les transitions du scarabée sont maintenant données par la matrice :

$$P = \begin{bmatrix} 3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 3/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 3/5 \end{bmatrix}.$$

En appliquant la même méthode, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P^n$. Interpréter le résultat.

Exercice 6 (Suite de Fibonacci)

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 0 \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

On veut trouver une formule donnant le terme général u_n en fonction de n . Pour cela, on construit une suite de vecteurs $(V_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\forall n \geq 0 \quad V_n = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer V_0, V_1, V_2 .
2. Grâce à la relation de récurrence sur $(u_n)_{n \geq 0}$, trouver une matrice A de taille 2×2 telle que pour tout $n \geq 0$: $V_{n+1} = AV_n$.
3. En déduire V_n en fonction de V_0, A et n .
4. Diagonaliser A . En déduire V_n , puis u_n .

Exercice 7 (Récurrence d'ordre 3)

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 0 \quad u_{n+3} = \frac{3}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n.$$

1. En reprenant la méthode ci-dessus avec le vecteur V_n défini pour tout $n \geq 0$ par :

$$V_n = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{bmatrix},$$

déterminer le terme général u_n en fonction de n . En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

2. Généralisation (récurrence d'ordre p) : soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite dont on connaît les p premiers termes u_0, u_1, \dots, u_{p-1} et obéissant à la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 0 \quad u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \dots + a_1u_{n+1} + a_0u_n.$$

En vous inspirant de ce qui précède, proposer une méthode pour déterminer u_n .

Exercice 8 (Exponentielle de matrice)

Soit A une matrice de taille $n \times n$. On appelle exponentielle de la matrice A et on note $\exp(A)$ la matrice de taille $n \times n$ définie par :

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$$

A tout hasard, on rappelle que pour tout réel x , on a : $\exp x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

1. On considère tout d'abord la matrice A définie par

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Calculer valeurs et vecteurs propres de A . En déduire une matrice de passage P et une matrice diagonale D telles que : $A = PDP^{-1}$.
 3. Calculer $\frac{D^n}{n!}$. En déduire $\exp(D)$.
 4. Exprimer $\exp(A)$ en fonction de P , P^{-1} et $\exp(D)$. En déduire que :

$$\exp(A) = \begin{bmatrix} \text{ch}(1) & \text{sh}(1) \\ \text{sh}(1) & \text{ch}(1) \end{bmatrix}$$

(on rappelle que $\text{ch}(x) = (\exp(x) + \exp(-x))/2$ et $\text{sh}(x) = (\exp(x) - \exp(-x))/2$).

5. Par la même méthode, calculer l'exponentielle de la matrice $-A$.
 6. Calculer $(\exp(A))^{-1}$. Comparer à $\exp(-A)$.
 7. Soit A une matrice de taille $n \times n$, que l'on suppose diagonalisable : $A = PDP^{-1}$, où D est diagonale de coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Exprimer $\exp(A)$ en fonction de P , P^{-1} et des λ_i .
 8. Montrer que $\exp(A)$ est inversible d'inverse $\exp(-A)$.
 9. Exprimer $\text{Tr}(A)$ en fonction des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Déterminer $\det(\exp(A))$ en fonction de $\text{Tr}(A)$.
 10. On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice A est-elle diagonalisable ?

11. Calculer A^2 , A^3 , et A^n pour tout $n \geq 4$. En déduire $\exp(A)$ en appliquant la formule de définition de l'exponentielle de matrice.
 12. On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Diagonaliser la matrice A et en déduire $\exp A$.

13. Calculer A^2 , A^3 , et de façon générale A^n . Retrouver le résultat de la question précédente pour $\exp(A)$ en appliquant la formule de définition de l'exponentielle de matrice.

TD 4 : Produit scalaire

Exercice 1 (Distance euclidienne)

1. Soit x et y deux vecteurs de \mathbb{R}^2 muni de sa base canonique ayant pour coordonnées x_1 et x_2 pour x et y_1 et y_2 pour y . Calculer la distance $d(x, y)$.
2. Soit \mathbb{R}^2 muni de la base (u, v) avec u de longueur l_1 , v de longueur l_2 et α l'angle formé par les vecteurs u et v . Calculer $d(x, y)$ en fonction de l_1 , l_2 et α .

Exercice 2 (Distances classiques)

Considérons les trois distances classiques de \mathbb{R}^2

$$\begin{aligned} d_2(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \\ d_1(x, y) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \\ d_\infty(x, y) &= \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}. \end{aligned}$$

Dessiner l'ensemble des points situés à distance 1 de l'origine.

Exercice 3 (Produit scalaire et orthogonalité)

Soit x et y deux vecteurs de \mathbb{R}^2 muni de sa base canonique ayant pour coordonnées x_1 et x_2 pour x et y_1 et y_2 pour y . Montrer que les 2 vecteurs sont orthogonaux si

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0.$$

Exercice 4 (Forme polaire)

Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique et q la forme quadratique associée, définie par $q(u) = \phi(u, u)$. Calculer $q(u + v)$ et en déduire que

$$\phi(u, v) = \frac{1}{2}(q(u + v) - q(u) - q(v)).$$

Exercice 5 (Inégalités classiques)

1. Démontrer l'inégalité de Cauchy -Schwarz :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \times \|y\|.$$

2. En déduire l'inégalité de Minkowski :

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

3. Quand y a-t-il égalité dans ces inégalités ?

Exercice 6 (To be or not to be...)

1. Considérons $E = \mathbb{R}^3$, les formes suivantes définissent-elles un produit scalaire ?

$$\phi(u, v) = u_1v_1 + 3u_2v_2 + u_3v_3$$

$$\phi(u, v) = u_1v_1 + 3u_2v_2 - u_3v_3$$

$$\phi(u, v) = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 4u_3v_3$$

$$\phi(u, v) = u_1v_1 + 2u_1v_2 + 2u_2v_1 + u_2v_2 + 4u_3v_3$$

$$\phi(u, v) = 3u_1v_1 + 14u_2v_2 + 8u_3v_3 + 6u_1v_2 - 3u_1v_3 - 4u_2v_3 + 6u_2v_1 - 3u_3v_1 - 4u_3v_2.$$

2. Pour chaque ϕ , donnez la matrice M de ϕ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

3. Trouvez une base dans laquelle la matrice \tilde{M} de ϕ soit diagonale. Donnez ensuite une relation entre les matrices M et \tilde{M} .

Exercice 7 (Produit scalaire avec paramètre)

Considérons l'application

$$\phi(u, v) = u_1v_1 + 6u_2v_2 + au_3v_3 - 2u_1v_2 - 2u_2v_1 - 3u_1v_3 - 3u_3v_1,$$

où a est un scalaire.

1. Déterminez a pour que $\phi(u, v)$ définisse un produit scalaire.

2. Donnez la matrice M de ϕ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

3. On fixe $a = 28$. Soit u un vecteur de coordonnées (x, y, z) dans la base canonique. On considère le changement de variable

$$\begin{cases} X = x - 2y - 3z \\ Y = y - 3z \\ Z = z \end{cases}$$

et on note $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ la base de \mathbb{R}^3 dans laquelle u a pour coordonnées (X, Y, Z) .

(a) Exprimer la forme quadratique q associée à ϕ en fonction de (X, Y, Z) .

(b) Quelle est la matrice de ϕ par rapport à \mathcal{B} ? On notera \tilde{M} cette matrice.

(c) Calculer la base \mathcal{B} .

(d) Donner une relation entre M et \tilde{M} .

Exercice 8 (Produit scalaire et matrice symétrique)

La matrice M d'un produit scalaire ϕ est-elle symétrique ?

TD 5 : Orthogonalité

Exercice 1

Considérons \mathbb{R}^3 muni de sa base canonique.

1. Vérifier que les vecteurs $v_1 = (1, 1, 1)'$, $v_2 = (-1, 1, 0)'$ et $v_3 = (1, 1, -2)'$ forment une base orthogonale de \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire usuel.
2. Soient $u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$, $u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$, et $u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}$, montrer que $\{u_1, u_2, u_3\}$ forme une base orthonormée de \mathbb{R}^3 .
3. Trouver les coordonnées dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ des vecteurs suivants $x_1 = (3, -1, 1)'$, $x_2 = (-1, 1, 1)'$, $x_3 = (2, 1, -2)'$, $x_4 = (2, -3, 1)'$, $x_5 = (1, 0, 0)'$ et $x_6 = (0, 1, -2)'$.

Exercice 2

Considérons \mathbb{R}^3 muni de sa base canonique et F le sous-espace de \mathbb{R}^3 engendré par $f_1 = (1, 1, 1)'$ et $f_2 = (1, 2, -1)'$. Construisez une base orthonormée de F .

Exercice 3

Considérons E engendré par $e_1 = (1, 1, 1)'$ et $e_2 = (-1, 2, -1)'$ et $e_3 = (0, 1, 2)'$. Construisez une base orthonormée de E .

Exercice 4

Soit \mathcal{B} une base orthonormée d'un espace euclidien E , on note U et V les coordonnées de deux vecteurs u et v de E dans \mathcal{B} . Soit f un endomorphisme symétrique de E , on note $A = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$.

1. Montrer que

$$\langle f(u), v \rangle = \langle u, f(v) \rangle .$$

2. Dédurre de la question précédente que 2 vecteurs propres associés à 2 valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

Exercice 5

Montrer que si le vecteur u est orthogonal à un sous-espace F et à son complément orthogonal, alors u est le vecteur nul. En déduire les éléments de $F \cap F^\perp$.

Exercice 6

Considérons $\{e_1, \dots, e_p\}$ une base orthonormée d'un espace euclidien E , considérons un élément u de E . Montrer que si $u = \sum_{i=1}^p \alpha_i e_i$ alors

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^p \alpha_i^2 .$$

Exercice 7

Considérons \mathbb{R}^3 muni de sa base canonique et F le sous-espace de \mathbb{R}^3 engendré par $f_1 = (1, 1, 1)'$ et $f_2 = (1, 2, -1)'$. Donnez la matrice de la projection orthogonale sur F et la matrice de la projection orthogonale sur F^\perp .

Exercice 8

Considérons \mathbb{R}^3 muni de sa base canonique, donnez la matrice de la projection orthogonale sur la droite engendrée par le vecteur $(1, 1, 1)'$, notée Π_1 et la matrice de la projection orthogonale sur son complément notée Π_{1^\perp} . Soit u un élément de \mathbb{R}^3 , que faites vous quand vous calculez $\Pi_1 u$ et $\Pi_{1^\perp} u$?

Exercice 9

Nous avons n individus. Pour chaque individu, nous mesurons p valeurs représentant des valeurs de variables différentes, par exemple, l'âge, le poids, la taille, temps de travail, assiduité au cours d'algèbre ... (notées de X_1 à X_p). Nous mesurons ensuite une dernière variable comme par exemple la note en analyse notée Y , dont nous pensons qu'elle est liée aux autres variables de manière linéaire. Considérons $E = \mathbb{R}^n$ et F le sous-espace engendré par X_1, \dots, X_p . Donnez la matrice de projection sur F .

Exercice 10

Soit F un sous-espace de dimension finie d'un espace euclidien E . Soient u et v deux vecteurs de E . Etablissez l'équivalence entre les propositions suivantes :

1. $v = \Pi_F u$
2. $v \in F$ et $\|u - v\| = \inf \{\|t - v\| : t \in F\}$
3. $v \in F$ et $\|u\|^2 = \|v\|^2 + \|u - v\|^2$.

Exercice 11

Soit $n \geq 1$ un entier fixé, considérons l'espace vectoriel $\mathcal{P}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n . Soient $t_0, t_1, \dots, t_n, n + 1$ nombres réels distincts fixés. Pour P et Q deux éléments quelconques de $\mathcal{P}_n[X]$, posons

$$\langle P, Q \rangle = P(t_0)Q(t_0) + \dots + P(t_n)Q(t_n).$$

1. Avec $n = 2, t_0 = 0, t_1 = 1/2, t_2 = 1$, calculer $\langle P, Q \rangle, \|P\|, \|Q\|$, et $d(P, Q)$, où $P(X) = 12X^2$ et $Q(X) = 2X - 1$.
2. Dans le cadre général, montrez que nous avons ainsi défini un produit scalaire sur $\mathcal{P}_n[X]$.
3. Soit $n = 4, t_0 = -2, t_1 = -1, t_2 = 0, t_3 = 1$ et $t_4 = 2$. Considérons $\mathcal{P}_2[X]$ comme sous-espace de $\mathcal{P}_4[X]$, de base $\{1, X, X^2\}$.
 - (a) Construisez une base orthogonale de $\mathcal{P}_2[X]$.
 - (b) Exprimez les polynômes $1, X$ et X^2 dans cette base.
 - (c) Déterminez la meilleure approximation de $P(X) = 5 - \frac{1}{2}X^4$ par des polynômes de $\mathcal{P}_2[X]$.

TD 6 : Transformations orthogonales et matrices symétriques

Exercice 1

Soit la forme bilinéaire symétrique :

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto 9x_1y_1 + 24x_2y_2 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1.\end{aligned}$$

Soit u et v deux vecteurs de \mathbb{R}^2 de coordonnées dans la base canonique :

$$u = (1, 2)', \quad v = (-2, 4)'$$

1. Donner la matrice de φ par rapport à la base canonique. On notera M_{can} cette matrice. Calculer $\varphi(u, v)$.
 - (a) Montrer que φ est un produit scalaire en utilisant la méthode de Gauss.
 - (b) A l'aide de la décomposition de Gauss, trouver une base \mathcal{B} dans laquelle la matrice de φ est diagonale.
 - (c) Calculer les coordonnées de u et v dans \mathcal{B} et en déduire $\varphi(u, v)$.
2. (a) Montrer que M_{can} est orthogonalement diagonalisable.
 - (b) Donner une base orthonormée \mathcal{B}' de \mathbb{R}^2 dans laquelle la matrice de φ est diagonale.
 - (c) Calculer les coordonnées de u et v dans \mathcal{B}' et retrouver $\varphi(u, v)$.

Exercice 2

Considérons \mathbb{R}^3 muni de sa base canonique et F le sous-espace de \mathbb{R}^3 engendré par $f_1 = (1, 1, 1)'$ et $f_2 = (1, 2, -1)'$. On note X la matrice

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donnez la matrice de la projection orthogonale sur F en fonction de X .

Exercice 3

Diagonaliser orthogonalement les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 73 & 36 \\ 36 & 52 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 (Critère de Sylvester)

Considérons la forme quadratique $Q(x) = x'Ax$, avec :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix},$$

1. Montrer que A admet 2 valeurs propres réelles λ_1 et λ_2 .
2. Montrez que $a + d = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2$.
3. On suppose que $\det(A) > 0$ et $a > 0$. Montrez que la forme quadratique est définie positive.

Exercice 5 (Racine carrée d'une matrice)

Soit V une matrice symétrique positive, montrez que V peut s'écrire comme le produit d'une matrice S et de sa transposée.

Exercice 6 (Forme quadratique)

Considérons la forme quadratique suivante :

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

1. Déterminez A la matrice associée à Q .
2. Diagonaliser orthogonalement A .
3. Transformer Q pour obtenir une forme sans terme produit.

Exercice 7 (Projection et polynômes)

Considérons l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. Soient t_0, t_1, \dots, t_3 , 4 nombres réels distincts fixés. Pour P et Q deux éléments quelconques de $\mathcal{P}_3[X]$, posons

$$\langle P, Q \rangle = P(t_0)Q(t_0) + \dots + P(t_3)Q(t_3).$$

1. Montrez que nous avons ainsi défini un produit scalaire sur $\mathcal{P}_3[X]$.
2. Soit $t_0 = -1$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$ et $t_3 = 2$. Considérons $\mathcal{P}_2[X]$ comme sous-espace de $\mathcal{P}_3[X]$, de base $\{1, X, X^2\}$. Déterminez la meilleure approximation de $P(X) = 5 - \frac{1}{2}X^3$ et $Q(X) = 3X + 2X^2$ par des polynômes de $\mathcal{P}_2[X]$.

Exercice 8 (Isométrie et matrice orthogonale)

Soit U une matrice carrée de taille n telle que

$$\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Montrez que la matrice U est orthogonale.

Exercice 9 (Valeurs propres d'une matrice orthogonale)

Montrez que si U est une matrice orthogonale, alors toutes les valeurs propres réelles valent ± 1 .

Exercice 10 (Valeurs propres d'une matrice de projection)

Quelles sont les valeurs propres de la matrice de la projection orthogonale de \mathbb{R}^4 sur F sous-espace de \mathbb{R}^4 de dimension 2 ?

Exercice 11 (Etude spectrale)

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} m & 2 & 2 \\ 2 & m & 2 \\ 2 & 2 & m \end{pmatrix},$$

où m est un réel fixé.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. La matrice A est-elle inversible ?

3. Trouvez les valeurs propres et sous-espaces propres de A ?
4. Discutez du rang de A en fonction de m .
5. Trouvez l'inverse de A lorsque l'inverse existe.

Exercice 12 (Produit scalaire et intégrale)

Soit $n \geq 1$ un entier fixé, considérons l'espace vectoriel $\mathcal{P}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n . Pour P et Q deux éléments quelconques de $\mathcal{P}_n[X]$, posons

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt.$$

1. Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{P}_n[X]$ (Indication : on rappelle que l'intégrale d'une fonction continue positive sur un segment est nulle ssi la fonction est nulle sur ce segment).
2. Calculer $\langle P, Q \rangle$, $\|P\|$, $\|Q\|$, et $d(P, Q)$, où $P(X) = 1$ et $Q(X) = X$.
3. On fixe $n = 2$ et on considère la base canonique $\{1, X, X^2\}$ de $\mathcal{P}_2[X]$. Par le procédé de Gram-Schmidt, construire une base orthonormée de $\mathcal{P}_2[X]$.
4. Exprimez les polynômes 1 , X et X^2 dans cette base.
5. Considérons $\mathcal{P}_2[X]$ comme sous-espace de $\mathcal{P}_3[X]$. Déterminez la meilleure approximation de $P(X) = X^3$ par des polynômes de $\mathcal{P}_2[X]$.