UEO Professeur des écoles Mathématiques

N. Jégou

nicolas.jegou@univ-rennes2.fr

February 14, 2019

Concours externe

- http://www.devenirenseignant.gouv.fr/
  "Le cadre de référence des épreuves est celui des programmes pour l'école primaire. Les connaissances attendues des candidats sont celles que nécessite un enseignement maîtrisé de ces programmes. Le niveau attendu correspond à celui exigé par la maîtrise des programmes de collège."

- Epreuves d'admissibilité : Ecrits
  - Français 4h
  - Mathématiques 4h

- Epreuves d'admission : Oraux
  - Mise en situation professionnelle (1h)
  - Entretien à partir d'un dossier (1h15 et 3h de prep.)

Epreuve de mathématiques

Trois parties : 13pts + 13pts + 14pts = 40pts

- Un problème portant sur un ou plusieurs domaines des programmes de l'école ou du collège
- Exercices indépendants permettant de vérifier les connaissances et compétences / programmes de l'école ou du collège.
- Analyse d'un dossier composé d'un ou plusieurs supports d'enseignement des mathématiques.

Programme du concours

- Numération et arithmétique
- Calculs et problèmes
- La proportionnalité
- La géométrie
- Les mesures
- Equations, inéquations, systèmes

Big picture

- Les origines
- Les Egyptiens
- Les Grecs
- Le Moyen Age
- La Renaissance : l'algèbre
- Le XVII^e : l'analyse
- Le XVIII^e : les fonctions
- Le XIX^e : l'abstraction
- Le XX^e : la synthèse

Les origines $\approx$ 20000 Av. J.-C.

- Os (bâtons) d'Ishango

- Premiers éléments de numération, de comptage
- Calendrier ?
- Opérations ?
- Nombres premiers ?

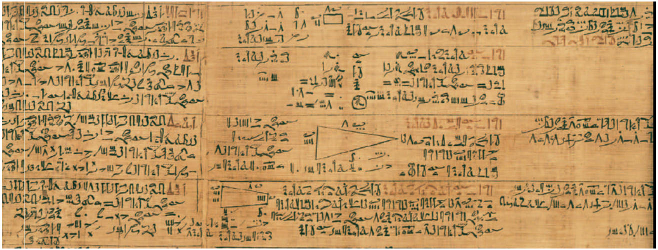
Babylone

- Tablette de Plimpton, 1800 Av. J.-C.

- Date de naissance des mathématiques ?
- "Invention" des nombres
- Numération par position $\leftrightarrow$ invention de l'écriture

Papyrus Rhind, 1640 Av. J.-C.

- Premier document connu, signé par le scribe Ahmès
- Problèmes d'arpentages
- Algorithmes de multiplication et division
- Système décimal
- Approche de π : $\pi \approx 3.16$



Papyrus Rhind : Table de division de 2

- Problème : Décomposer une fraction en sommes de fractions unitaires

  Pour n impair, trouver les entiers $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tels que

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots$$

- Quelques solutions

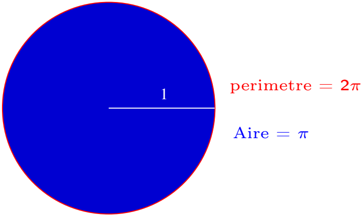
  $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ $\quad$ $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ $\quad$ $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$

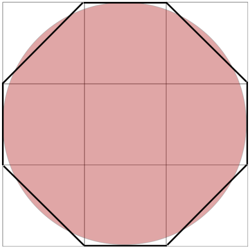
  ...

  ...

  $\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$

Papyrus Rhind : $\pi \approx 3.16$



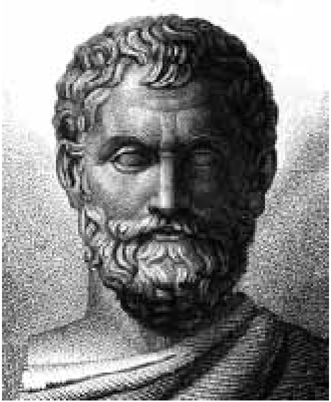


Les Grecs

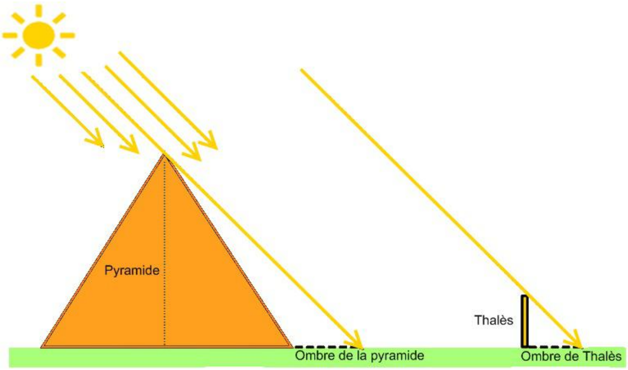
- Thalès 590 Av. J.-C.
  Fonde la géométrie, propriétés du triangle
- Pythagore 540 Av. J.-C.
  Vers les nombres irrationnels
- Euclide 300 Av. J.-C. : Les Eléments
  Axiomatique, le théorème et sa démonstration

Thalès

- Calcul de la hauteur de la grande pyramide
- Prédiction d'une éclipse
- Théorème de Thalès

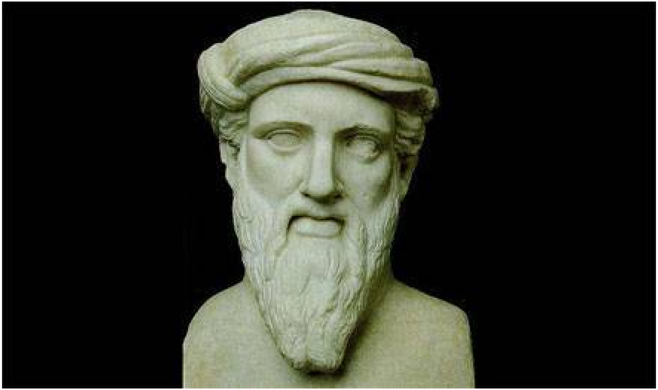


Hauteur de la grande pyramide

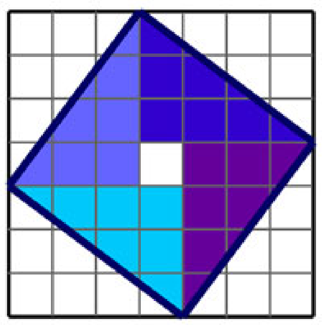


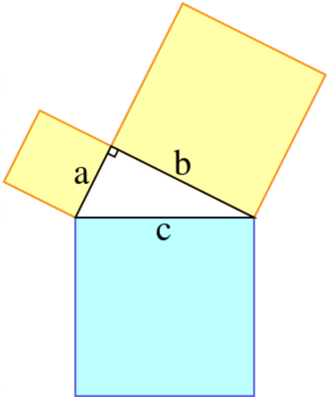
Pythagore

- Fonde l'école pythagoricienne
- Théorisation de la gamme musicale (proportions harmoniques)
- Démonstration du Théorème relatif au triangle rectangle



La somme des carrés des longueurs des côtés...





Les nombres carrés

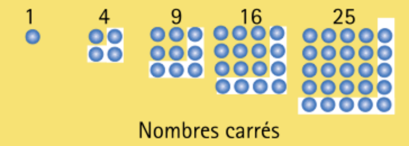


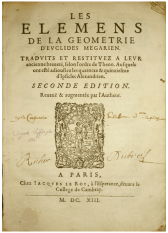
Illustration des propriétés :

- $1 + 3 = 4$
- $1 + 3 + 5 = 9$
- $1 + 3 + 5 + 7 = 16$
- ...

Euclide

Euclide : les éléments

- 13 volumes, 470 problèmes résolus : preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ (raisonnement par l'absurde)
- Théorie des nombres : division Euclidienne, PGCD, algorithme d'Euclide
- Axomatique, postulat, définition, théorème, démonstration



Définitions

- Le point est ce qui n'a pas de parties
- Une ligne est une longueur sans largeur
- Lorsqu'une droite tombant sur une droite fait deux angles de suite égaux entre eux , chacun des angles égaux est droit ; et la droite placée au-dessus est dite perpendiculaire à celle sur laquelle elle est placée
- L'angle aigu est celui qui est plus petit qu'un angle doit
- Parmi les figures trilatères , le triangle rectangle est celle qui a un angle droit...

Postulats / Axiomes

- Un segment de droite peut être tracé en joignant deux points quelconques
- Un segment de droite peut être prolongé indéfiniment en une ligne droite
- Étant donné un segment de droite quelconque, un cercle peut être tracé en prenant ce segment comme rayon et l'une de ses extrémités comme centre...

Postulats / Axiomes

- Deux choses égales à une troisième sont aussi égales entre elles
- Si des grandeurs égales sont ajoutées à d'autres grandeurs également égales entre elles, leurs sommes sont égales
- Si des grandeurs égales sont soustraites à d'autres grandeurs égales, leurs différences sont égales...

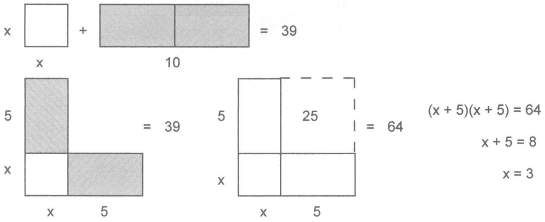
Le Moyen Age

- Brahmagupta 628 :
  - Le zéro et les opérations associées (nombres négatifs,...)
  - Les chiffres arabes ! (0,1,2,...)
  - Solution à l'équation générale de degré 2
- Al Khwarizmi 825
  - Premier traité d'algèbre
  - Description du système décimal
- Fibonacci 1202 :
  - Lien entre le savoir mathématique des musulmans (chiffres indo-arabes) et l'Occident
  - Calcul commercial : conversions entre monnaies et bases de numération
- Al Kashi 1424 :
  - Trigonométrie
  - Calcule 10 décimales de π

Résolution d'une équation du 2nd degré

Solution graphique à l'équation

$$x^2 + 10x = 39$$



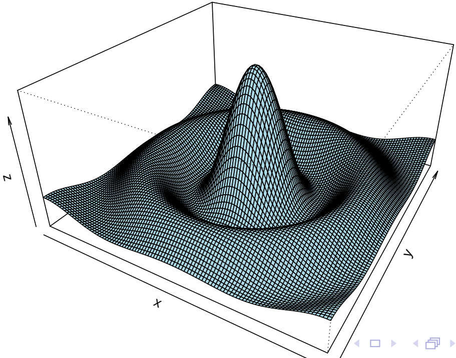
Epoque moderne

- Descartes 1637 :
  - Bases de la géométrie analytique
  - Valide les travaux de Galilée
- Leibniz 1864 :
  - Bases de l'analyse moderne : notion de fonction
  - Travaux sur les infinitésimaux
  - Calcul différentiel et intégral
- Euler 1748 :
  - Calculs numériques d'intégrales
  - Convergences des séries
  - La fonction exponentielle
- Dedekind 1863 :
  - Théorie des nombres
  - Construction rigoureuse $\mathbb{R}$ à partir des nombres rationnels

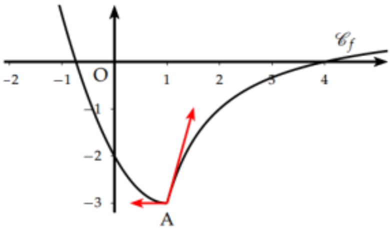
Leibniz

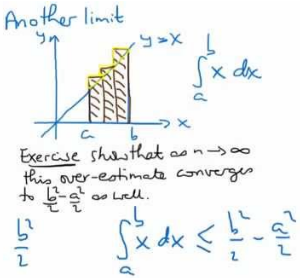
Graphe d'une fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Graphe de $f : (x, y) \mapsto \frac{10\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}$



"Infinitésimaux" : dérivation, intégration





"Infinitésimaux" : séries

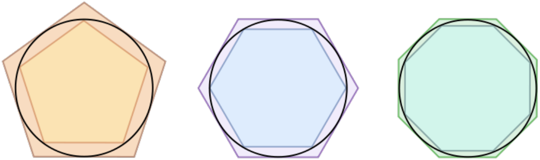
- L'exponentielle comme limite d'une série :

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

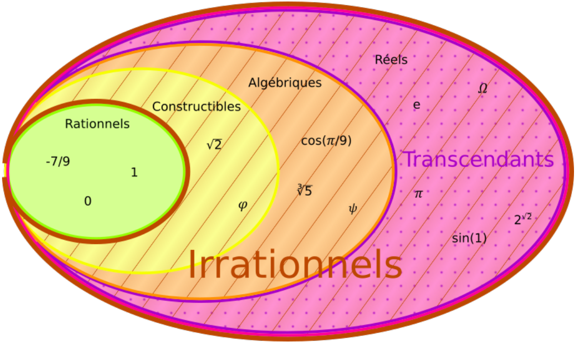
- π comme limite d'une série :

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Méthode d'Archimède :

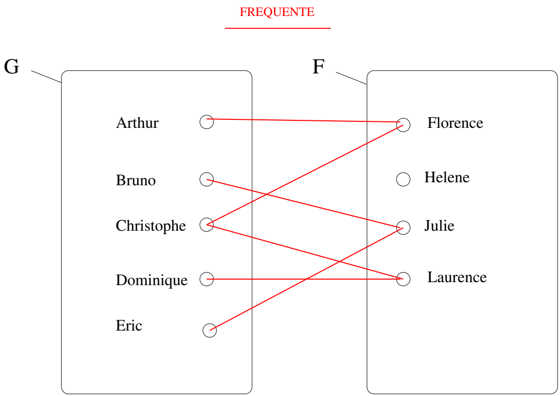


Ensembles de nombres



Graphe d'un application

- Application : relations entre (les éléments de) 2 ensembles
- Graphe de l'application : représentation des relations
- Exemple :



Graphe d'une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

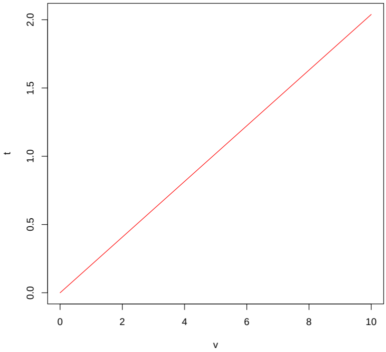
- Les ensembles manipulés peuvent contenir une infinité d'éléments
- Par exemple : Un objet est lancé verticalement. Quel temps met-il à retomber ? Cela dépend de la vitesse du lancer
- Graphe de la fonction :

$$\begin{array}{rcl} [0,10] & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & t = \frac{2v}{g} \end{array}$$

Graphe d'une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

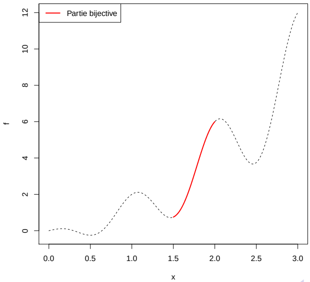
Représentation graphique

- La fonction est linéaire : t proportionnel à v
- La représentation graphique est une droite



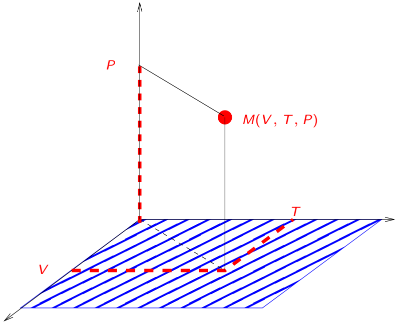
Graphe d'une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- Représenter une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nécéssite 2 dimensions :
  - une dimension (un axe) associé à la représentation des valeurs x en entrée
  - une dimension (un axe) associé à la représentation des valeurs image $f(x)$
- La représentation est une courbe dans le plan



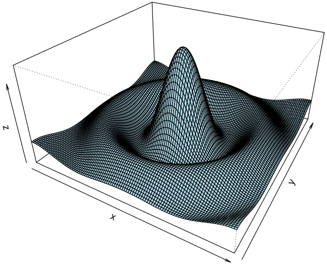
Fonction de plusieurs variables

- Exemple La pression d'un gaz est fonction du volume et de la température (Eq. des gaz parfaits) : $P = f(V, T)$
- Trois dimensions sont nécéssaires à la représentation :



Fonction de plusieurs variables

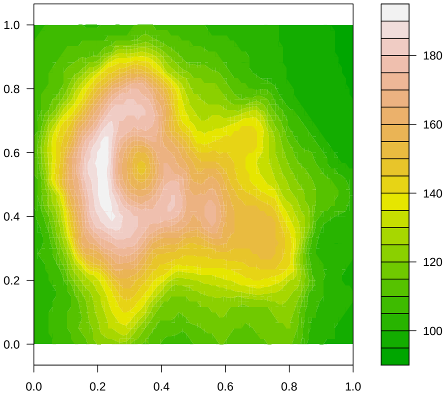
- Une fonction à 2 variables peut être représentée par une surface en 3 dimensions



- Comment représenter une fonction à plus de 2 variables ?

Représentations multidimensionnelles

Heatmap



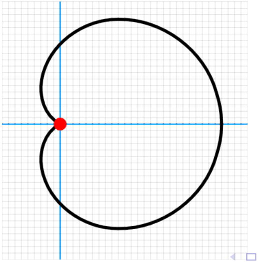
Représentations multidimensionnelles

Fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

- Exemple : Cardioïde
- La variable est le temps t, les coordonnées sont fonctions de t

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & x(t) = \cos(t)(1-\cos(t)) \\ & & y(t) = \sin(t)(1-cos(t)) \end{array}$$

- Trajectoire :
  https://www.youtube.com/watch?v=SwolvfpeHsM



Représentations multidimensionnelles

Réduction de dimension : ex. en statistique

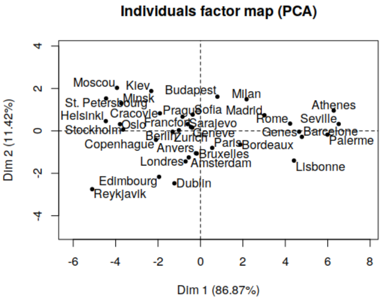
- Données : temperatures mensuelles pour 35 villes d'Europe
- Tableau : 35×12
- Nuage de 35 points dans un espace à 12 dimensions

	Janvier	Fevrier	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Aout	Septembre	Octobre	Novembre	Decembre
Amsterdam	2.9	2.5	5.7	8.2	12.5	14.8	17.1	17.1	14.5	11.4	7.0	4.4
Athenes	9.1	9.7	11.7	15.4	20.1	24.5	27.4	27.2	23.8	19.2	14.6	11.0
Berlin	-0.2	0.1	4.4	8.2	13.8	16.0	18.3	18.0	14.4	10.0	4.2	1.2
Bruxelles	3.3	3.3	6.7	8.9	12.8	15.6	17.8	17.8	15.0	11.1	6.7	4.4
Budapest	-1.1	0.8	5.5	11.6	17.0	20.2	22.0	21.3	16.9	11.3	5.1	0.7
Copenhague	-0.4	-0.4	1.3	5.8	11.1	15.4	17.1	16.6	13.3	8.8	4.1	1.3
Dublin	4.8	5.0	5.9	7.8	10.4	13.3	15.0	14.6	12.7	9.7	6.7	5.4
Helsinki	-5.8	-6.2	-2.7	3.1	10.2	14.0	17.2	14.9	9.7	5.2	0.1	-2.3
Kiev	-5.9	-5.0	-0.3	7.4	14.3	17.8	19.4	18.5	13.7	7.5	1.2	-3.6
Cracovie	-3.7	-2.0	1.9	7.9	13.2	16.9	18.4	17.6	13.7	8.6	2.6	-1.7

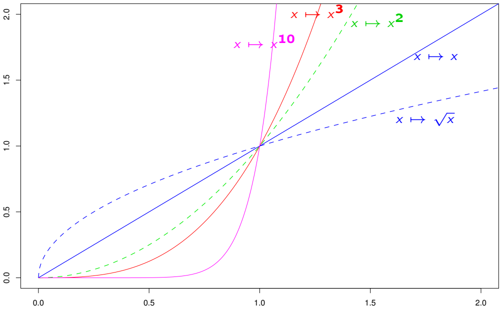
Représentations multidimensionnelles

Analyse en Composantes Principales (ACP)

- Objectif : typologie des villes selon les profils de température
  - Quelles villes sont "proches" en terme de températures ?
  - Quelles villes sont "éloignées" en terme de températures ?
- Idée de l'ACP (Hotelling, 1930) : Suite de représentations planes reconstituant l'ensemble du nuage



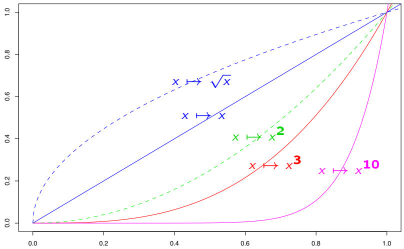
Croissances comparées



Croissances comparées : $x \in]0,1[$

- $x \in]0,1[\Rightarrow \qquad x^{10} < x^3 < x^2 < x < \sqrt{x}$

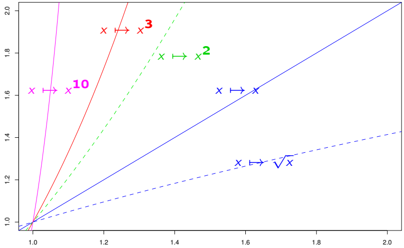
- "Infinitésimaux" Au voisinage de 0 :
  - x est infiniment plus grand que x^2
  - x^2 est infiniment plus grand que x^3
  - ...



Croissances comparées : $x > 1$

- $x > 1 \Rightarrow \qquad x^{10} > x^3 > x^2 > x > \sqrt{x}$

- "Infinitésimaux" Au voisinage de $+\infty$:
  - x est infiniment plus petit que x^2
  - x^2 est infiniment plus petit que x^3
  - ...



Unités d'aire

- $x = \frac{1}{10}X \Rightarrow x^2 = \frac{1}{100}X^2$
- $X = 10x \Rightarrow X^2 = 100x^2$

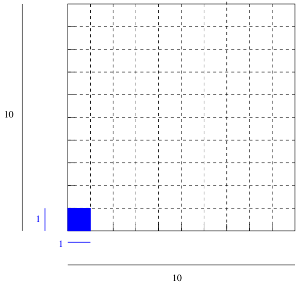


Tableau de convertion des aires

- $1\ m^2 \ = \ 10\ 000\ cm^2$
- $1\ ha \ = \ 10\ 000\ m^2 \ = \ 100\ m \times\ 100\ m$

Km^2		Hm^2 Ha		Dam^2 a		M^2		Dm^2		Cm^2		Mm^2	
							5	0	0	0	0		
			2	0	0	0	0						
									0	0	0	0	5
					0	7	0	0	0				

Unités de volume

- $x = \frac{1}{10}X \Rightarrow x^3 = \frac{1}{1\ 000}X^3$
- $X = 10x \Rightarrow X^3 = 1\ 000x^3$

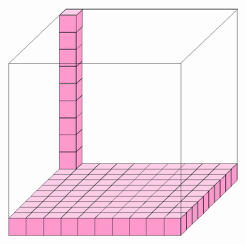


Tableau de convertion des volumes

- $1\ m^3 \ = \ 1\ 000\ dm^3 \ = \ 1\ 000\ L$
- $1\ L \ = \ 1\ dm^3 \ = \ 1\ 000\ cm^3$

hm³			dam³			m³			dm³			cm³			mm³		
											L	dl	cl	ml			
											0	0	5	0			
								0	0	0	8						
							2	5	0	0	0						
					0	1	0	3	6								

Equations aux dimensions

- Analyse dimensionnelle : permet de vérifier l'homogénéité d'une formule physique au travers de ses équations aux dimensions
- On ne peut comparer, ajouter que des grandeurs ayant les mêmes dimensions : une longeur à une autre,...
- Les grandeurs de base : longueur (L), masse (M), temps (T), Intensité électrique (I), température (θ), quantité de matière (N), intensité lumineuse (J)
- On en déduit les dimensions des grandeurs manipulées
  Exemple : la vitesse

$$V = \frac{\Delta D}{\Delta t} \Rightarrow [V] = \frac{L}{T} = L.T^{-1}$$

Equations aux dimensions

- Dimension $\neq$ unité : deux longueurs peuvent s'exprimer dans des unités différentes, mais les dimensions sont égales

- L'égalité des dimensions est nécéssaire à la comparaison de deux grandeurs

  Par exemple : $x > y \Rightarrow [x] = [y]$

  Donc $[x] \neq [y] \Rightarrow x$ et y ne sont pas comparables... on s'est trompé

Exemples

- Accélération : mesure une variation de vitesse en un temps donné

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} \Rightarrow [a] = \frac{\frac{L}{T}}{T} = \frac{L}{T^2} = L.T^{-2}$$

  Une accélération s'exprime donc (par exemple) en m/s^2

- Principe fondamental de la dynamique ; pour un solide soumis à son seul poids : $\vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow P = ma \Rightarrow mg = ma \Rightarrow g = a$

  La constante de gravitation g a la dimension d'une accélération

  Elle s'exprime donc (par exemple) en m/s^2

Chiffres - Nombres

- Nombre : notion naturelle associée à une grandeur
- Chiffres : éléments d'écriture visant à
  - faciliter l'écriture (la représentation) des nombres
  - faciliter les opérations sur les nombres

- Analogie :
  - Mot $\equiv$ nombre
  - Chiffre $\equiv$ lettre

- Confusions : chiffre d'affaire, du chômage, chiffrage...

Système unaire

- Système le plus simple car il ne contient qu'un seul chiffre : le chiffre $|$ qui représente le nombre "un"
- Dans ce système le nombre "12" s'écrit : $||||||||||||$
- Base du système de numérotation Egyptien, qui ajoute quelques symboles :
  $\cap \equiv 10$, $\wr \equiv 100$

Chiffres Romains

- Chiffres utilisés :

$$I \equiv 1 \qquad V \equiv 5 \qquad X \equiv 10 \qquad L \equiv 50$$

$$C \equiv 100 \qquad D \equiv 500 \qquad M \equiv 1000$$

- Par exemple : $MDXV \equiv 1515$, $MMDXVI \equiv 2516$
- C'est un système de numération positionnelle
- Problème : ce système ne permet pas les opérations $\Rightarrow$ recours aux abaques

Base en numération

- Définition : valeur dont les puissances successives permettent l'écriture des nombres dans la numération positionnelle

- Base 2 : les puissances successives utilisées sont :

$$2^0 = 1, \qquad 2^1 = 2, \qquad 2^2 = 4, \qquad 2^3 = 8, \ldots$$

- Base 10 : les puissances successives utilisées sont :

$$10^0 = 1, \qquad 10^1 = 10, \qquad 10^2 = 100, \qquad 10^3 = 1000, \ldots$$

Exemples

- Le nombre s'écrivant 101 en base 2 est

$$1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 4 + 0 + 2 = 6$$

- Le nombre s'écrivant 2871 en base 8 est

$$2\times8^3+8\times8^2+7\times8^1+1\times8^0 = 2\times512+8\times64+7\times8+1\times1 = 1593$$

Unicité

- En base 10, les nombres s'écrivent avec les chiffres : 0,1,2,...,9
- En base 2, avec les chiffres : 0,1,2
- En base B, avec les chiffres : 0,1,2,...,B-1
- Ceci garantit l'unicité de l'écriture

- En effet, imaginons par exemple, le nombre 31 écrit en base 2 :

$$\begin{aligned} 3 \times 2^1 + 1 \times 2^0 &= (2+1) \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= 111 \end{aligned}$$

Opérations

- Cette écriture positionnelle des nombres facilite les opérations
- Exemple : addition de 111 et 101 en base 2

	2^3	2^2	2^1	2^0
		1	1	1
+		1	0	1
	0	2	1	2
	1	0	2	0
	1	1	0	0

- En base 2 : $111 + 101 = 1100$

La base 10

- C'est la base communément utilisée
- Les éléments constitutifs sont $10^0 = 1$, 10^1, 10^2,...
- Le principe oératoire est le même :

	10^3	10^2	10^1	10^0
		3	2	8
+		8	0	7
	0	11	2	15
	1	1	3	5