UEO-pro Préparation au concours PE
Université Rennes 2
Mathématiques - Travaux dirigés

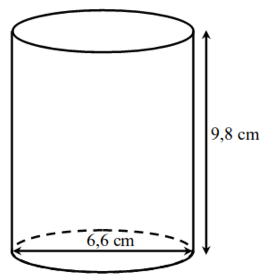
Géométrie

Le texte ici proposé est un extrait du sujet du concours du groupement académique 2 donné en 2018.

Dans l'exercice, on cherche à optimiser la quantité de métal nécessaire à la fabrication de canettes de 33 centilitres (cL).

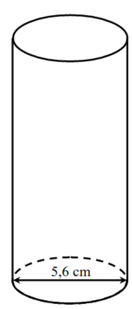
Partie A : canette "classique"

On modélise une "canette classique" par le cylindre de révolution représenté ci-dessous. Le volume d'un tel cylindre s'obtient en multipliant l'aire de sa base par sa hauteur. Vérifier que le volume de ce cylindre, de diamètre $6,6\,\text{cm}$ et de hauteur $9,8\,\text{cm}$, est supérieur à 33 cL.



Partie B : canette "slim"

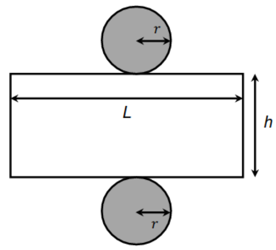
Un nouveau format de canette est apparu dernièrement sur le marché. Ces canettes allongées, dites "slim", sont plus hautes et plus fines que les précédentes, pour une même contenance. Le cylindre représenté ci-dessous en modélise une. Son diamètre est de $5,6\,\text{cm}$. Déterminer au millimètre près la plus petite hauteur possible du cylindre pour que la canette contienne au moins 33 cL.



Partie C : Lien entre le rayon de la base d'une canette et l'aire de son patron

On appelle r le rayon, en centimètre, de la base du cylindre modélisant une canette de 33 cL et h sa hauteur, en centimètre.

1. Vérifier que $h = \frac{330}{\pi r^2}$.
2. La figure ci-dessous représente le patron du cylindre. Celui-ci est formé de deux disques, et d'un rectangle de largeur h et de longueur L, exprimée en centimètre. Exprimer la longueur L en fonction de r.



3. Vérifier que l'aire, en centimètre carré, de la partie rectangulaire du patron est $\frac{660}{r}$.

4. Exprimer l'aire totale $\mathcal{A}$ du patron du cylindre, en centimètre carré, en fonction de r.

Partie D : Lecture graphique

On s'intéresse à la réalisation d'un cylindre de révolution de base de rayon r, exprimé en cm, et de contenance 33 cL. L'aire exprimée en cm^2 de la surface de métal nécéssaire est modélisée par la fonction f qui, à tout nombre réel r associe $f(r) = 2\pi r^2 + \frac{660}{r}$. La fonction est représentée ci-dessous :

1. Quelle est l'aire de la surface de métal nécessaire pour un cylindre dont la base a pour rayon 1,5cm ?

2. A quelle(s) valeur(s) du rayon du cylindre correspond une aire de 300cm^2 ?

3. Déterminer laquelle de la canette “classique” ou de la canette “slim” utilise le moins de surface de métal pour sa réalisation. Justifier la réponse en donnant les lectures graphiques effectuées.

4. A quelle valeur du rayon correspond la surface minimale de métal nécessaire à la fabrication d'une canette de 33cL ?

Partie E

Les canettes sont fabriquées à partir d'une feuille plane de tôle d'aluminium d'épaisseur 130 micromètres (μm). Un micromètre est égal à un millionième de mètre. La masse volumique de l'aluminium est 2700 kg/m^3. On s'intéresse aux canettes classiques dont le rayon est de 3,3cm et dont la surface de métal nécessaire est de 268,42 cm^2. On admet que l'anneau pour ouvrir la canette et le rivet de liaison entre l'anneau et le couvercle ont une masse de 1,4 g et que la masse d'aluminium nécessaire pour souder le couvercle au reste de la canette est 1,9 g.

1. Déterminer, au dixième de gramme près, la masse d'aluminium nécessaire pour fabriquer une canette classique.

2. Il faut 9 kg d'aluminium pour fabriquer un certain type de vélo. Estimer le nombre de cannettes classiques nécessaires pour obtenir l'aluminium pour fabriquer un tel vélo.