UEO-pro Préparation au concours PE
Université Rennes 2
Mathématiques - Travaux dirigés

Arithmétique - suite

Algorithme d'Euclide

L'algorithme d'Euclide est un algorithme permettant de déterminer le plus grand commun diviseur (PGCD) de deux entiers sans connaître leur factorisation (leur décomposition en produit de facteurs premiers). Il s'appuie sur deux propriétés. La première est la suivante :

Propriété 1 : Soit a, b, d, q et r des entiers. On suppose que $a = bq + r$. Alors d divise a et b si et seulement si d divise b et r.
Ainsi, en particulier, un nombre divise deux entiers a et b si et seulement si il divise le reste de la division Euclidienne de a par b. Il s'ensuit que la PGCD de a et b, qui fait partie de la liste des diviseurs de a et b divise aussi le reste de la division Euclidienne de a par b donc il fait partie de la liste des diviseurs de a, b et r, reste de cette division. Par conséquent, on a

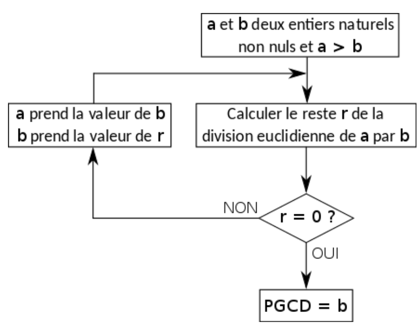
$$\mathrm{PGCD}(a, b) = \mathrm{PGCD}(b, r) \text{ avec } r \text{ reste de la division euclidienne de } a \text{ par } b$$

Propriété 2 : Il est par ailleurs clair que pour tout entier a,

$$\mathrm{PGCD}(a, 0) = a.$$

En effet, tout entier est un diviseur de 0 donc le plus grand diviseur commun entre 0 et a lui-même est a.

Voici une schématisation de l'algorithme d'Euclide :



Applications

1. Calculer $\mathrm{PGCD}(a, b)$ dans les cas suivants :

   - $a = 230$, $b = 126$
   - $a = 390$, $b = 720$
   - $a = 112$, $b = 39$

2. Simplifier si possible les fractions suivantes :

$$\frac{1045}{462} \qquad \frac{84}{238} \qquad \frac{195}{176}$$

3. Quels sont les diviseurs communs à 390 et 525 ?

Nombres premiers - Nombres premiers entre eux

Nombre premier : Un nombre entier est dit premier s'il n'admet pas d'autre diviseur que 1 et lui-même. Noter que tous les nombres entiers ont la propriété d'être divisible par 1 et eux-mêmes. Les nombres premiers sont sont qui n'admettent pas d'autre diviseur.

Nombres premiers entre eux : Deux nombres sont dits premiers entre eux si leur plus grand diviseur commun est 1. Noter cette fois que deux nombres ont toujours 1 comme diviseur commun. La particularité des nombres premiers entre eux est qu'ils n'en ont pas d'autres (sinon leur PGCD serait supérieur à 1).

Exercices

1. Soit n un entier positif. Montrer que le nombre $n^2 + 2n - 3$ n'est jamais un nombre premier.
2. Soit n un entier. On note $n!$ (et on dit factorielle n) le nombre
$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$$
   - Montrer, que quelque soit l'entier n, les nombres suivants ne peuvent pas être premiers :
$$n! + 2, n! + 3, \ldots, n! + n$$
   - En déduire que pour tout entier n, il existe $n - 1$ entiers consécutifs non premiers.
3. Les nombres suivants sont ils premiers entre eux ?
$$a = 21 \text{ et } b = 45 \qquad a = 39 \text{ et } b = 65$$
4. On cherche à montrer que $3^{123} - 5$ et 25 sont premiers entre eux.
   - Soit $d = \text{PGCD}(3^{123} - 5, 25)$. Pourquoi d ne peut être égal qu'à 1, 5 ou 25 ?
   - Est ce que 5 est un diviseur possible de 3^{123} ? de $3^{123} - 5$?
   - Conclure.

Changements de base

1. Combien vaut le nombre qui s'écrit 10011 en base 2 ?
2. Combien vaut le nombre qui s'écrit 112 en base 3 ?
3. Ecrire le nombre 13 en base 2, puis en base 3 puis en base 7.