UEO-pro Préparation au concours PE
Université Rennes 2
Mathématiques - Travaux dirigés

Eléments de base en arithmétique

Divisibilité

Définition : Soit a et b deux entiers relatifs. On dit que a divise b (ou que b est un multiple de a) s'il existe un entier k tel que $b = a \times k$. On note $a|b$.
Remarque : La définition, tout comme les quelques propriétés qui vont suivre sont écrites pour des entiers relatifs. Une approche possible pour s'approprier ces éléments est de considérer dans un premier temps des entiers naturels avant d'étendre.

Propriétés :

1. $a|b$ et $b|c \Rightarrow a|c$
2. $a|b$ et $b|a \Rightarrow |a| = |b|$
3. $a|b \Rightarrow a|bc$
4. $a|b$ et $a|c \Rightarrow a|(b + c)$
5. $a|b$ et $a|c \Rightarrow a|(b - c)$
6. $a|b$ et $a'|b' \Rightarrow aa'|bb'$

Exercices

1. Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse (extraits des concours 2016 ou 2017)
   - Pour n'importe quel nombre entier n, $(n + 2)^2 - (n - 2)^2$ est un multiple de 8.
   - Pour n'importe quel nombre entier n, $(n + 2)^2 - (n - 2)^2$ est un multiple de 32.
   - Il existe au moins un nombre entier pair, supérieur à 7, divisible par 3 mais divisible ni par 9 ni par 4.
   - Pour obtenir le carré d'un nombre entier, il suffit de multiplier le nombre entier qui le précède par le nombre entier qui le suit puis d'ajouter 1.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, l'entier $n(n + 1)$ est pair.
3. Le produit de deux entiers impairs est-il toujours un nombre impair ?
4. Montrer que pour tout entier naturel n, l'entier $n(n + 1)(n + 2)$ est divisible par 6.
5. Quels entiers naturels vérifient $(n^2 + 1)|n$?
6. Quels sont les entiers naturels tels que $n|(n + 7)$?
7. Montrer que si n est la somme des carrés de deux entiers consécutifs, alors $2n - 1$ est le carré d'un entier.
8. On se propose de montrer la réciproque de la propriété précédente. En guise d'aide, utiliser (et montrer si nécéssaire) les résultats suivants
   - Formuler la proposition à démontrer.
   - Montrer que pour tout nombre x (entier ou non),

$$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 = \frac{x^2+1}{2}$$

- Vérifier que si $2n-1$ est le carré d'un entier k alors k est nécéssairement impair.
- Vérifier que si $2n-1$ est le carré d'un entier k alors n vérifie

$$n = \frac{k^2+1}{2}$$

Division Euclidienne

Théorème : Soit a et b deux entiers avec $b \geq 1$. Alors il existe un unique couple d'entiers (q, r) tels que

- $a = b \times q + r$;
- $0 \leq r \leq b-1$.

Les entiers q et r s'appellent respectivement le quotient et le reste de la division Euclidienne de a par b.

Applications directes : Effectuer la division Euclidienne de a par b avec

- $a = 25$ et $b = 7$.
- $a = -25$ et $b = 7$.

Exercices

1. Soit a et b deux entiers. On effectue la division de a par 7 et l'on trouve 3 comme reste. En effetuant la division Euclidienne de b par 7, on trouve 4 comme reste. Indiquer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse, en justifiant la réponse (extraits du concours 2016) : $a+b$ est divisible par 7.
2. Déterminer les entiers positifs a et b sachant que $a < 4000$ et que la division euclidienne de a par b donne un quotient de 82 et un reste de 47. (Aide : commencer par minorer b)
3. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $2^{2013} + 562$ par 4.
4. Quand on divise un nombre par 12, le reste est 8. Quand on divise ce même nombre par 10, on augmente le quotient de 1 et le reste devient 2. Quel est ce nombre?
5. Démontrer que sur la droite d'équation $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$, il n'y a aucun point à coordonnées entières.

PGCD et algorithme d'Euclide

Il peut être utile de connaitre le plus grand diviseur commun à deux entiers en particulier pour simplifier des fractions. Par exemple, savoir que le PGCD de 364 et 154 est 14 permet d'écrire

$$\frac{154}{364} = \frac{154/14}{364/14} = \frac{11}{26}$$

et de savoir que la fraction résultat n'est plus simplifiable.

Pour connaitre le PGCD de 2 nombres, une possibilité est de dresser la liste des diviseurs de chacun d'entre eux, d'en déduire la liste des diviseurs communs puis de choisir le plus grand. On gagne du temps en décomposant les nombres en produits de facteurs premiers :

$$364 = 2 \times 2 \times 7 \times 13 \qquad 154 = 2 \times 7 \times 11$$

Il est alors clair que le plus grand diviseur commun est en effet $2 \times 7 = 14$.

Applications directes

1. Dresser la liste des diviseurs de 364 puis celle de 154.
2. Déterminer le PGCD de 594 et de 495.

Propriété utile : Soit a, b, d, q et r des entiers. On suppose que $a = bq + r$. Alors d divise a et b si et seulement si d divise b et r.

Exercice

Montrer la propriété précédente.