UEO-pro Préparation au concours PE
Université Rennes 2
Mathématiques - Travaux dirigés

Eléments de logique

Assertion - Connecteur logique

Un raisonnement se doit d'être logique pour pouvoir affirmer si telle chose est vraie ou fausse. En mathématique, un raisonnement est basé sur une logique déductive.
Exemple: Un Parisien vient passer une journée en Bretagne. Pas de chance, car ce jour-là il pleut...Cette personne, pourrait affirmer qu'il pleut toujours en Bretagne, mais ceci n'est pas vrai. L'erreur faite est qu'il pense avoir "déduit" que si le jour où il est venu en Bretagne, il pleuvait, alors cela doit également vrai les autres jours de l'année. Alors que la seule déduction que l'on peut faire à l'aide de cette observation, est qu'il ne fait pas toujours beau en Bretagne !
Un raisonnement doit être structuré. c'est un texte composé de phrases et de liens entre elles. Une telle phrase est appelée **assertion** ou **proposition** et un tel lien est appelé **connecteur logique**.
Exemples d'assertions :

- " il pleut"
- "le sol est mouillé"
- "ABCD est un carré"

Un connecteur logique est un mot qui permet de fabriquer de nouvelles assertions à partir d'autres. Dans un souci de clarté, le mot ne doit être utilisé que dans un seul sens. Une difficulté est que ce n'est pas toujours le cas dans le langage courant. Par exemple, dans le langage courant, le mot "et" n'a pas toujours le même sens :

- "il se lève **et** sort de la salle" : "et"traduit ici une succession de faits
- "j'ai faim et soif" : "et"traduit ici une accumulation d'informations (sans ordre contrairement au cas précédent)

De même, dans le langage courant, selon le contexte, le mot "ou", peut être exclusif ou inclusif :

- Au restaurant, si le menu propose "fromage ou dessert", vous ne pouvez choisir qu'un seul d'entre eux
- Par contre, dans les transports en commun, s'il est écrit "place réservée aux personnes âgées ou invalides", il est possible qu'une personne soit à la fois âgée et invalide

Dans ce langage mathématique, un connecteur logique ne doit pas avoir plusieurs plusieurs significations. Il convient donc de définir les connecteurs logiques propres au langage mathématique :

Définitions

et : c'est la juxtaposition de deux assertions. L'assertion $A \,\mathrm{et}\, B$ est vraie si et seulement si A et B sont simultanément vraies.

ou : en logique il est utilisé au sens inclusif. L'assertion $A \,\mathrm{ou}\, B$ est vraie si et seulement si au moins l'une des deux assertions A ou B est vraie.

non : c'est la négation d'une assertion. L'assertion non-A est vraie si A est fausse et fausse si A est vraie.

si ... alors : c'est l'*implication* d'une assertion sur une autre. Si le fait que A soit vraie entraine le fait que B le soit, on dit que A implique B et on note $A \Rightarrow B$.

équivalent : on dit que deux assertions A et B sont équivalentes et on note $A \Leftrightarrow B$ si ($A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$).

Exercice 1

Dans les exemples qui suivent, relier les assertions P et Q au moyen des connecteurs $\Rightarrow$ ou $\Leftrightarrow$:

1. P : Il pleut, Q : Il y a des nuages
2. P : Il y a des l'essence dans le réservoir, Q : Le moteur tourne
3. P : Je casse des œufs, Q : Je fais une ommelette
4. P : $AI = IB$, Q : I milieu de $[AB]$
5. P : dans le triangle ABC, $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 60$ degrés, Q : ABC isocèle en A
6. P : I milieu de $[AB]$, Q : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$
7. P : $x^2 = 4$, Q : $x = 2$

Exercice 2

Est ce que les assertions suivantes sont vraies ?

1. $2 < 3$
2. $2 \leq 2$
3. $2 < 3$ ou 2 est un nombre pair
4. $2 < 3$ et 2 est un nombre pair
5. $2 < 3$ ou 2 est un nombre impair
6. $2 < 3$ et 2 est un nombre impair
7. $P \Rightarrow (P \text{ ou } Q)$
8. $(P \text{ et } Q) \Rightarrow P$

Condition nécéssaire - Condition suffisante

Soit A et B sont deux assertions et considérons que l'on a $A \Rightarrow B$. Ainsi, si A est réalisée alors B l'est aussi. Par conséquent, il suffit que A se réalise pour que B se réalise aussi. Une façon de reformuler l'assertion $A \Rightarrow B$ est de dire A est une **condition suffisante** pour B. On peut trouver encore une autre formulation en disant que B est une **condition nécéssaire** pour A. En effet, observer la réalisation B est nécéssaire pour observer celle de A, ou autrement dit, observer A suppose d'observer B puisque l'observation de A entraîne celle de B. On peut aussi s'en convaincre en s'appuyant sur la négation. B est nécéssaire pour A puisque si on n'observe pas B, c'est que l'on ne peut pas avoir A (puisque si on avait A, on aurait "automatiquement" B).
Finalement, avec $A \Rightarrow B$, A est suffisante pour B et B nécéssaire pour A. Par conséquent, avec $A \Leftrightarrow B$, on a B **nécéssaire et suffisante** pour A (et réciproquement).

Exercice 3

Reprendre les cas de l'exercice 1 en les exprimant en termes de conditions, nécéssaires, suffisantes ou nécéssaires et suffisantes.

Exercice 4

Dans les questions qui suivent, on propose deux assertions que l'on demande d'exprimer l'une par rapport à l'autre en termes de conditions nécéssaires et/ou suffisantes.

1. L : $ABCD$ est un losange et P : $ABCD$ est un parallelogramme.
2. A : x et y sont deux réels de même signe et B : $xy \geq 0$.
3. A : avoir son permis de conduire et B : avoir son code.
4. A : le point M est sur la médiatrice de $[AB]$ et B : $MA = MB$.

Négation - Raisonnement par contraposée

Exercice 5

Ecrire la négation de chacune des assertions suivantes :

1. $x = 2$
2. Pierre est architecte
3. Le week-end, Pierre regarde la télévision ou lit un roman
4. Le meutrier est grand et porte la barbe
5. Toutes les boules de l'urne sont rouge
6. Il existe une boule blanche dans l'urne

L'exercice précédent permet d'illustrer les propriétés suivantes de la négation :

Propriétés

Soit P et Q deux assertions. On a les équivalences suivantes :

- non$(P$ et $Q) \Leftrightarrow$ (non P ou non $Q)$
- non$(P$ ou $Q) \Leftrightarrow$ (non P et non $Q)$

Exercice 6

On reprend les exemples de l'exercice 1 (sauf le cas 5). Dans chaque cas, formuler la négation de chacune des assertions. Relier ensuite ces nouvelles assertions par un connecteur logique.
L'exercice précédent permet d'illustrer la propriété suivante de la négation :

Propriété

Soit P et Q deux assertions. On a alors

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P)$$

Autrement dit, lorsque l'on doit prouver l'implication $P \Rightarrow Q$, il est équivalent de montrer l'implication (non $Q) \Rightarrow$ (non $P)$: c'est le **raisonnement par contrapostion**.

Exercice 7

Ou bien Pierre a obtenu sa bourse, ou bien il travaille à la banque. S'il travaille à la banque Marie l'y a vu. Si Marie l'y a vu, elle t'en a parlé. Marie ne t'en a pas parlé. Conclusion ?

Exercice 8

Le théorème de Pythagore s'énonce de la manière suivante : si ABC est une traingle rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Enoncer la contraposée de ce théorème.

Exercice 9

Soit n un nombre entier. Montrer que si n^2 est un nombre pair alors n est un nombre pair.

Raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde est une technique de démonstration qui consiste à supposer que l'assertion contraire à celle que l'on veut prouver est vraie pour aboutir à une contradiction. On montre ainsi que l'hypothèse faite (le contraire de celle qu'on voulait prouver) est absurde ! Donnons un exemple simple : on souhaite prouver que 0 n'admet pas d'inverse dans $\mathbb{R}$. On suppose par l'absurde qu'il admet élément inverse, disons a. Alors a vérifie $a \times 0 = 1$, ce qui est absurde car 0 est absorbant i.e. $a \times 0 = 0$. On vient de prouver que 0 n'est pas inversible.

Exercice 10

Montrer que si vous rangez $n+1$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant au moins 2 paires de chaussettes.