

Chapitre 1

Lecture de tableaux et pourcentages

Exercice 1.1 (Pourcentages simples)

1. On calcule les pourcentages par rapport à la production totale de fromage qu'on obtient en faisant la somme des valeurs de la première colonne soit 21376 tonnes.
2. On complète le tableau en rapportant la quantité de chaque fromage produite à cette production totale (les résultats ont été arrondis à 10^{-3} dans la seconde colonne et à 10^{-1} dans la dernière). Ainsi par exemple, la production de Bleu d'Auvergne représente 37,8% de la production totale des six fromages considérés.

Fromage	Production	Pourcentage (décimal)	écriture avec %
Abondance	750	0,035	3,5%
Beaufort	3 560	0,167	16,7%
Bleu d'Auvergne	8 070	0,378	37,8%
Bleu de Gex	518	0,024	2,4%
Bleu des Causses	1 371	0,064	6,4%
Brie de Meaux	7 107	0,332	33,2%

Exercice 1.2 (Euros courants et euros constants)

1. Le salaire net correspond au salaire brut amputé des prélèvements soit 23800 euros.
2. Les prélèvements représentent 4494 euros sur un salaire brut de 28294 euros soit :

$$\frac{4494}{28294} \approx 0,159 = 15,9\%$$

3. Le salaire brut diminué de 15,9% donne le salaire net. On peut aussi dire que le salaire net correspond à 84,1% du salaire brut (figure 1.1 en page 2).

Exercice 1.3 (Pourcentage et populations)

1. 6 019 hommes âgés de 15 à 19 ans sont salariés à temps complet en Bretagne en 1999.
2. 467 990 hommes et 275 570 femmes travaillent à temps complet soit au total 743 560 personnes. La proportion d'hommes est donc :

$$\frac{467990}{743560} = 62,9\%$$

3. 467 990 hommes sur 611 031 sont salariés à temps complet soit 76,6%.

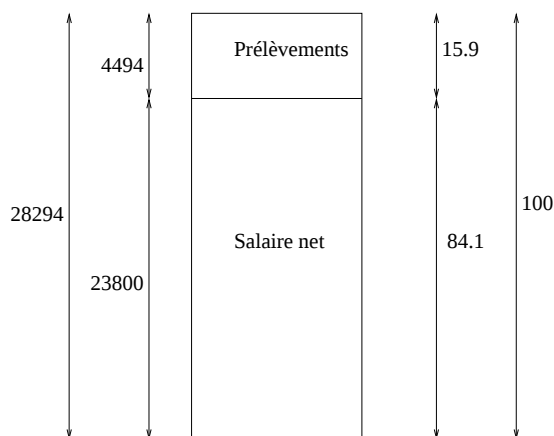


FIG. 1.1 – Part des prélèvements sur le salaire brut

4. Sur un total de 611 031 hommes, 7535 sont des salariés âgés de 15 à 19 ans (on ne compte pas les 149 non salariés), soit 1,23%.
5. 499 576 hommes sont salariés (emploi à temps complet et emploi à temps partiel) et les 15-19 ans sont 7535, soit 1,5%.

Exercice 1.4 (Parc locatif social au 1er janvier de l'année)

1. Sur un total de 3 915 184 logements loués en 1999, 1 555 664 comptent quatre pièces ou plus (1 183 878 logements de quatre pièces et 371 786 de cinq pièces ou plus) soit 39,7%. En 2002, la proportion est de 39,5%.
2. En 2000, 496 058 logements sur 3 998 004 sont des logements construits après 1990 ce qui représente 12,4 %. En 2001, cette catégorie représente 13,8% du parc locatif.

Chapitre 2

Pourcentage d'évolution

2.1 Pourcentage d'évolution entre 2 dates

2.2 Evolution et coefficient multiplicateur

Exercice 2.1 (Pourcentage et multiplicateurs)

Tableau complété :

	Multiplicateur	pourcentage	écriture avec %
Abondance	1,124	0,124	12,4 %
Beaufort	1,049	0,049	4,9%
Bleu d'Auvergne	0,984	-0,016	-1,6%
Bleu de Gex	1,006	0,006	0,6%
Bleu des Causses	0,92	-0,08	-8%
Brie de Meaux	1,064	0,064	6,4%

Exercice 2.2 (Euros courants et euros constants)

1. Le salaire net correspond au salaire brut amputé des prélèvements soit 23 800 euros.
2. La colonne "évolution 2000 - 2001 en euros courants" représente les pourcentages d'évolution réels du salaire. Par exemple, le pourcentage d'évolution du salaire brut entre 2000 et 2001 est défini par :

$$\frac{\text{Salaire brut}_{2001} - \text{Salaire brut}_{2000}}{\text{Salaire brut}_{2000}}$$

il est environ égal à 1,9% et on peut interpréter en disant que le salaire brut a augmenté de 1,9% entre 2000 et 2001. La colonne "évolution 2000 - 2001 en euros constants" représente les pourcentages d'évolution des salaires mais calculés en mesurant l'inflation. On ne peut pas retrouver ces valeurs avec les données dont nous disposons mais disons quand même qu'en euros constants, le salaire brut n'a augmenté que de 0,2% car les prix ont eux aussi augmenté.

3. Sous cette hypothèse, le salaire net a augmenté de 0,3% entre 2000 et 2001 d'où :

$$\text{Salaire net euros constants}_{2001} = \text{Salaire net}_{2000} \times 1,003 \approx 23\,412 \text{ euros.}$$

4. En 2001, 23 800 euros courants correspondent à 23 412 euros constants donc :

$$1 \text{ euro courant} = \frac{23412}{23800} \approx 0,98 \text{ euro constant}$$

Compléments à la remarque en page 7 du cours

Pour mesurer l'évolution d'une grandeur sur plusieurs périodes successives, on n'ajoute donc pas les taux de croissance.

Raisonnons sur l'exemple simple d'une grandeur de prix initial 100 euros qui subit deux hausses successives de 20%. La hausse globale n'est pas 40% puisque la seconde augmentation est de 20% sur une grandeur coûtant alors 120 euros (illustration en figure 2.1 page 5).

Si on raisonne sur les taux de croissance, le calcul de p_2 en fonction de p_0 est le suivant :

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 + 0,2p_1 \\ &= p_0 + 0,2p_0 + 0,2(p_0 + 0,2p_0) \\ &= p_0 + 0,4p_0 + 0,04p_0 \\ &= p_0 + 0,44p_0 \end{aligned}$$

Si on raisonne à l'aide des multiplicateurs,

$$\begin{aligned} p_2 &= 1,2p_1 \\ &= 1,2 \times 1,2p_0 \\ &= 1,44p_0 \end{aligned}$$

Les deux calculs permettent de constater que la hausse globale est de 44% du prix initial mais la seconde façon de faire est plus simple et son utilisation s'impose réellement dès qu'on envisage plus de deux évolutions successives.

2.3 Pourcentage d'évolution annuel moyen

Exercice 2.3 (Parc locatif social au 1er janvier de l'année)

1. Le pourcentage d'évolution de 1999 à 2002, du nombre de logements construits après 1990 est :

$$\frac{\text{valeur}_{2002} - \text{valeur}_{1999}}{\text{valeur}_{1999}} = \frac{604\,264 - 455\,493}{455\,493} \approx 32,7\%$$

soit une augmentation de 32,7%.

2. De même, on obtient une baisse de 19,6% entre 2000 et 2002 du nombre de logements construits avant 1950.
3. Dans le premier cas, on a une augmentation de 32,7% en trois ans. L'erreur classique consiste à dire que l'augmentation annuelle est donc de $(32,7/3)\%$. Il est préférable de raisonner préalablement sur les multiplicateurs en se demandant quel taux annuel constant donnerait 32,7% d'augmentation sur trois ans.

Le multiplicateur correspondant c est solution de l'équation $c^3 = 1,327$, donc $c = (1,327)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1,327} \approx 1,099$. Un taux de croissance annuel de 9,9% pendant trois ans conduit donc à une augmentation de 32,7% sur cette période.

De même, dans l'autre cas, la résolution de $c^2 = 0,804$ donne $c = (0,804)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0,804} \approx 0,897$ d'où un pourcentage d'évolution moyen de -10,3%.

Exercice 2.4 (Production d'électricité)

1. En 2003, il y a trois types de production d'électricité, l'électricité d'origine nucléaire qui fournit environ 78% de la production, celle d'origine thermique et celle d'origine hydrolique éolienne ou photovoltaïque fournissant respectivement 10,7% et 11,5% de la production.

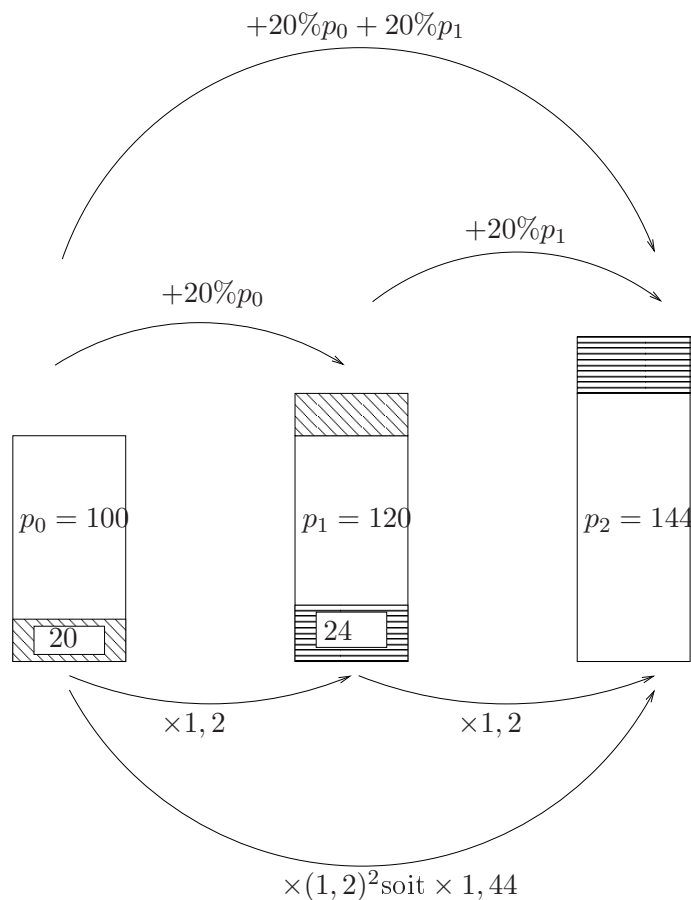


FIG. 2.1 – Evolutions successives

2. Les pourcentages d'évolution de chaque type de production entre 2002 et 2003 sont :
 - $+8,8\%$ pour la production thermique,
 - $+1\%$ environ pour la production nucléaire et
 - $-2,2\%$ pour le dernier type.
3. La période est de 13 ans. Détaillons le calcul du taux annuel moyen de croissance pour l'énergie thermique :

le multiplicateur correspondant à cette période est $\frac{60,6}{48,2}$

donc le multiplicateur annuel moyen associé $\left(\frac{60,6}{48,2}\right)^{\frac{1}{13}} \approx 1,0178$

et finalement, un taux de croissance annuel moyen de $1,78\%$.

De même, pour l'énergie nucléaire le taux est $2,66\%$ et celui de l'énergie hydrolique éolienne ou photovoltaïque $0,86\%$.

Exercice 2.5 (Population des régions en 1982, 1990, 1999 et au 01/01/2002 - France entière)

On a guère d'autre choix que d'effectuer les calculs pour toutes les régions à part l'Outre-mer dont la donnée 2002 n'est pas renseignée. A ce titre, il est utile de savoir utiliser les listes dont la plupart des calculatrices scientifiques sont munies pour rendre les calculs plus rapides et plus sûrs.

Il n'est pas précisé dans les questions, s'il s'agit d'évolution brutes ou en pourcentages, aussi les réponses présentent les deux situations.

1. De 1982 à 2002, c'est la région Ile de France qui, avec environ un million d'habitants de plus, connaît la plus forte augmentation. C'est en Languedoc-Roussillon, qu'en pourcentage, la hausse est la plus importante avec une croissance de 23,3% de la population.
2. De 1982 à 2002, la région Limousin qui perd 27 500 habitants (-3,7%) connaît la plus forte diminution.

Exercice 2.6 (Production nationale d'énergie primaire (1))

1. La production totale a globalement augmenté entre 1973 et 2002 puisqu'elle a été multipliée par plus de 3. Cette hausse provient principalement de l'électricité primaire qui avec le développement de l'énergie nucléaire a été environ multipliée par 15. Notons que les production de charbon et de gaz ont beaucoup baissé (respectivement de -93% et -78%) alors que la production d'énergies renouvelables n'a que modérément augmenté (+20%). Le cas du pétrole est intéressant puisque sa production a augmenté entre 1973 et 1990 (dans la première moitié des années 80 surtout) pour ensuite baissé de façon continue jusqu'en 2002.
2. Tableau des résultats :

sources	évolutions					
	73-90	moy	90-02	moy	73-02	moy
Charbon	-55,5%	-4,65%	-84,4%	-14,4%	-93,1%	-8,8%
Electricité	+985%	15,1%	37,7%	2,7%	1393,75%	9,77%

On constate ainsi que pour le charbon, la baisse est plus importante à partir de 1990 alors que la production d'électricité a surtout augmenté pendant la période précédente.

Exercice 2.7 (Effectifs d'étudiants des universités par discipline et par cycle selon le sexe)

1. Il faut d'abord calculer le nombre d'étudiantes en premier cycle. Sur 692 449 étudiants de premier cycle, 57% sont des filles soit 394 696 au total. 59,8% des 31 389 étudiants, soit 18 771 en premier cycle AES sont des filles. Parmi les étudiantes du 1er cycle, la proportion de la filières AES est donc $\frac{18871}{394696} = 4,8\%$.
2. En marge, à droite du tableau, on lit qu'il y a 60,3% de filles sur les 53 385 étudiants en AES tous cycles confondus soit 32 191 au total. Parmi elles, 18 771 sont en premier cycle soit une proportion de 58,3%.

Exercice 2.8 (Répartition des étudiants français)

Chaque colonne représente la répartition en pourcentage des étudiants de chaque filière suivant la CSP du chef de famille. Pour répondre aux questions, il faut d'abord "retrouver" les effectifs, dans chacune des filières universitaires, des étudiants d'origines « Professions intermédiaires » et « Ouvriers » avant de calculer les pourcentages. Précisons qu'on ne prend en compte ni les étudiants en classes préparatoires ni ceux en sections de techniciens supérieurs.

Profession	Droit	Economie	Lettres	Sc+Staps	Santé	IUT	Ens univ
Pr interm	19 419	19 704	68 665	50 415	19 268	21 477	198 948
%	9,8	9,9	34,5	25,3	9,7	10,8	100
Ouvriers	14 025	17 705	46 759	30 712	6 380	17 443	133 024
%	10,5	13,3	35,2	23,1	4,8	13,1	100

Remarque

On ne retrouve pas tout à fait dans notre tableau les mêmes totaux que ceux obtenus en considérant la répartition des CSP sur l'ensemble de l'université dans le tableau de l'énoncé. Par exemple, Les enfants de parents exerçant de professions intermédiaires représentent 16% des 1 244 515 étudiants à l'université soit 199 122 alors que nous n'en dénombrons que 198 948. On devrait en théorie trouver la même chose mais les différences proviennent des erreurs liées aux arrondis.

Commentaire

Les fils d'ouvriers sont plus représentés en IUT ou en filière économique alors les enfants dont les parents exercent des professions intermédiaires s'orientent davantage vers les études liées à la santé.

Chapitre 3

Les indices

Exercice 3.1 (Indices simples)

Tableau d'indices :

CSP	1962	1975	1982	1990	2002
Personnels de service aux particuliers	100	92	97	116	182
Employés administratifs d'entreprise	100	162	183	172	190
Employés civils et agents de service de la fonction publique	100	175	217	248	260
Professions de la santé, travail social	100	228	311	388	539
Employés de commerce	100	138	161	188	236
Instituteurs et assimilés	100	175	197	191	205

Exercice 3.2 (Activité, emploi et chômage des femmes, France, 1975-2002)

Tableau d'indices :

	Activité	Emploi	Chômage (au sens du BIT)
1975	100	100	100
1980	111	108	174
1985	120	113	254
1990	127	121	247
1995	133	124	306
2002	141	138	239

Exercice 3.3 (Population active et temps partiel)

Tableau d'indices :

	Croissance de la population active féminine		Développement du travail à temps partiel féminin	
	Effectifs	Taux d'activité	Effectifs	Part dans l'emploi
1975	100	100	100	100
1980	111	106	111	105
1985	122	112	145	133
1990	134	118	166	144
1995	143	122	211	176
1997	145	123	228	188

La population active féminine a augmenté de 45% sur cette période de 22 ans mais la croissance du taux d'activité des femmes est plus modérée (+23%). Le développement du travail à temps partiel (+ 128% avec un pic de 1980 à 1985 puis un autre de 1990 à 1995) est important, la part de cette activité augmentant de 88% entre 1975 et 1997.

Exercice 3.4 (Sous emploi)

tableau d'indices :

	Hommes	Femmes	Ensemble
1990	100	100	100
1991	103	96	98
1992	103	102	102
1993	156	125	134
1994	152	143	146
1995	161	148	152
1996	167	152	157
1997	153	164	161
1998	154	164	161
1999	164	160	161
2000	139	156	151
2001	132	150	145
2002	120	142	136

Le sous-emploi a augmenté de 36% entre 1990 et 2002, l'augmentation étant plus importante chez les femmes (+42%) que chez les hommes (+20%). Ce sous-emploi a augmenté de 1990 à 1998-1999 (avec un pic en 1993 et de façon plus irrégulière chez les hommes que chez les femmes) mais on constate ensuite une baisse.

Exercice 3.5 (Les indices d'habitation)

Tableau de résultats :

Indice des loyers Base 100 : année 1980		Année	Indice du coût de la construction Base 100 : année 1990
204,7	100,0	1990	100
	105	1991	105,3
	110,3	1992	105,6
	115,1	1993	106,7
	118,4	1994	107
	121,5	1995	106,4
	124,1	1996	109,9
	125,8	1997	112,2
100,0	128,6	1998	112,8
101,8	130,9	1999	111,9
101,8	130,9	2000	118,4
102,2	131,4	2001	119,7
104,9	134,9	2002	123,1

L'indice des loyers n'est à calculer qu'à partir de 1999 et par exemple :

$$I_{2001}^L = \frac{102,2}{101,8} \times I_{2000}^L.$$

Exercice 3.6 (Indices boursiers)

Les indices boursiers de la compagnie des agents de change (Bourse de Paris).

Année	CAC 40	
		pourcentage
1992	1 857,80	
1993	2 268,20	+22,1
1994	1 881,20	-17,1
1995	1 872,00	-0,5
1996	2 315,70	+23,7
1997	2 998,90	+29,5
1998	3 942,70	+31,5
1999	5 958,30	+51,1
2000	5 926,40	-0,5
2001	4 624,60	-22

1. On enregistre la hausse la plus importante en 1999 (+51,5%) et la baisse la plus forte en 2001(-22%).
2. Le pourcentage d'évolution trimestriel moyen en 1999 est :

$$\sqrt[4]{1,515} - 1 \approx 0,109 = 10,9\%$$

et celui de l'année 2001,

$$\sqrt[4]{0,78} - 1 \approx -6\%.$$

Exercice 3.7 (Indices composites)

1. On rappelle la formule donnant l'indice de Laspeyres :

$$L_{1/0}(p) = \sum_{k=1}^n C_0^{(k)} I_{1/0}^{(k)} = \frac{\sum_{k=1}^n q_0^{(k)} p_1^{(k)}}{\sum_{k=1}^n q_0^{(k)} p_0^{(k)}} \times 100.$$

Dans l'exemple, les sommes portent sur les trois produits A, B, C , p désigne le prix et q la production.

– En utilisant la première formule :

la dépense budgétaire à la date 0 est

$$D_0 = q_0^A p_0^A + q_0^B p_0^B + q_0^C p_0^C = 42000 \text{ euros},$$

les coefficients budgétaires sont donc

$$C_0^A = \frac{q_0^A p_0^A}{D_0} = \frac{20000}{42000} \approx 0,48 \quad C_0^B = \frac{q_0^B p_0^B}{D_0} = \frac{10000}{42000} \approx 0,29 \quad C_0^C = \frac{q_0^C p_0^C}{D_0} = \frac{12000}{42000} \approx 0,35$$

Les indices d'évolution des prix sont :

$$I_{10}^A = 100 \times \frac{5}{4} = 125 \quad I_{10}^B = 100 \times \frac{6}{5} = 120 \quad I_{10}^C = 100 \times \frac{3}{2} = 150$$

d'où l'indice de Laspeyres

$$L_{1/0} = C_0^A I_{10}^A + C_0^B I_{10}^B + C_0^C I_{10}^C \approx 131.$$

– Dans la seconde formule, on reconnaît D_0 au dénominateur de la fraction, et le numérateur est :

$$q_0^A p_1^A + q_0^B p_1^B + q_0^C p_1^C = 55000,$$

donc on retrouve

$$L_{1/0} = 100 \times \frac{55000}{42000} \approx 131.$$

Cet indice mesure l'évolution sur la dépense, d'une production équivalente à celle de la date 0, mais subissant l'évolution des prix.

Dans l'exemple, si la production de la date 1 est la même qu'à la date 0, la dépense tenant compte des variations des prix sera en hausse de 31%.

2. On rappelle la formule de l'indice de Paasche des prix :

$$P_{1/0}(p) = \frac{\sum_{k=1}^n q_1^{(k)} p_1^{(k)}}{\sum_{k=1}^n q_1^{(k)} p_0^{(k)}} \times 100.$$

Au numérateur, on reconnaît la dépense budgétaire de la date 1 :

$$D_1 = q_1^A p_1^A + q_1^B p_1^B + q_1^C p_1^C = 60000 \text{ euros},$$

le dénominateur mesure la dépense équivalente à la production de la date 1 aux prix de la date 0 :

$$q_1^A p_0^A + q_1^B p_0^B + q_1^C p_0^C = 46500 \text{ euros},$$

d'où l'indice de Paasche des prix :

$$P_{1/0} = \frac{60000}{46500} \times 100 \approx 129$$

Cet indice mesure le rapport entre la dépense réelle à la date 1 et celle que la production de la date 1 aurait été avec les prix antérieurs.

Exercice 3.8 (Evolution de la consommation)

- Les indices simples de prix base 100 en 2000 sont,
 - pour l'alimentation : 105,3
 - pour les boissons alcoolisées et le tabac : 103,3
 - pour la santé : 98,5
- Ramenés en pourcentages, les coefficients budgétaires 2000 sont 0,5492 pour l'alimentation, 0,1345 pour l'alcool et le tabac et 0,3163 pour la santé d'où l'indice de Laspeyres d'évolution des prix entre 2000 et 2001 :

$$L_{1/0} = 0,5492 \times 105,3 + 0,1345 \times 103,3 + 0,3163 \times 98,5 \approx 102,9.$$

- Si on note par A l'alimentation, par B alcool et tabac et par C la santé, on cherche $q_{1/0}^A$, $q_{1/0}^B$ et $q_{1/0}^C$, indices d'évolution des quantités pour chaque fonction de consommation. L'énoncé nous donne $D_0 = 2$ milliards et $D_1 = 2,2$ milliards donc $D_1/D_0 = 1,1$ et nous connaissons les coefficients budgétaires en 2000 et 2001, pour A , B et C .

Raisonnons sur A :

- A représente 55,19% de la dépense budgétaire de 2001 et 54,92% de celle de 2000 ce qu'on traduit par :

$$\frac{q_1^A p_1^A}{D_1} = 0,5519 \text{ et } \frac{q_0^A p_0^A}{D_0} = 0,5492.$$

- En faisant le rapport, il vient

$$q_{1/0}^A = \frac{q_1^A}{q_0^A} = \frac{0,5519}{0,5492} \times \frac{p_0^A}{p_1^A} \times \frac{D_1}{D_0},$$

- donc,

$$q_{1/0}^A = \frac{q_1^A}{q_0^A} = \frac{0,5519}{0,5492} \times \frac{1}{1,053} \times 1,1 \approx 1,05.$$

De même,

$$q_{1/0}^B \approx 1,036 \text{ et } q_{1/0}^C \approx 1,12.$$

Exercice 3.9 (Evolution des salaires)

- L'indice de Laspeyres des salaires est :

$$L_{1/0}(S) = \frac{80 \times 22000 + 20 \times 37500}{80 \times 15000 + 20 \times 30000} \times 100 \approx 139$$

- L'indice de Paasche des salaires est :

$$P_{1/0}(S) = \frac{150 \times 22000 + 30 \times 37500}{150 \times 15000 + 30 \times 30000} \times 100 \approx 140.$$

- On rappelle l'indice mesurant l'effet structure $\bar{S}_1/\bar{S}'_1$, où $\bar{S}_1$ est le salaire moyen à la date 1 et $\bar{S}'_1$ est le salaire moyen calculé avec les salaires de la date 1 et les effectifs de salariés, dans chaque catégorie, de la date 0.

Dans l'exemple,

$$\frac{\bar{S}_1}{\bar{S}'_1} = \frac{\frac{150}{180} \times 22000 + \frac{30}{180} \times 37500}{\frac{80}{100} \times 22000 + \frac{20}{100} \times 37500} \approx 0,98.$$

Cet indice est inférieur à 1 et on constate que si les salaires ont augmenté dans chaque catégorie, cette hausse est contrecarrée par une baisse de qualification des salariés, la proportion d'employés ayant augmenté entre les deux années.

Exercice 3.10 (Effet structure et qualité)

1. Les salaires horaires moyens en euros chaque année sont :

$$\begin{aligned}\bar{S}_0 &= \frac{90}{100} \times 6 + \frac{10}{100} \times 60 = 11,4 \\ \bar{S}_1 &= \frac{40}{50} \times 5 + \frac{10}{50} \times 50 = 14 \\ \bar{S}_2 &= \frac{95}{100} \times 7 + \frac{5}{100} \times 70 = 10,15\end{aligned}$$

Les indices correspondants (avec 1 comme valeur de base) sont donc :

$$\begin{aligned}\bar{S}_{1/0} &= \frac{14}{11,4} \approx 1,23 \\ \bar{S}_{2/1} &= \frac{10,15}{14} \approx 0,725 \\ \bar{S}_{2/0} &= \frac{10,15}{11,4} \approx 0,89\end{aligned}$$

2. Les effets structure sont :

– Années 0-1 :

$$\frac{\bar{S}}{\bar{S}'} = \frac{14}{\frac{90}{100} \times 5 + \frac{10}{100} \times 50} \approx 1,47.$$

– Années 1-2 :

$$\frac{\bar{S}}{\bar{S}'} = \frac{10,15}{\frac{40}{50} \times 7 + \frac{10}{50} \times 70} \approx 0,52.$$

– Années 0-2 :

$$\frac{\bar{S}}{\bar{S}'} = \frac{10,15}{\frac{90}{100} \times 7 + \frac{10}{100} \times 70} \approx 0,76.$$

Interprétation : les salaires dans chaque catégorie sont plus faibles l'année 1 que l'année 0 mais la proportion de salariés bien payés qui double puisqu'elle passe de 10% à 20% explique la hausse du salaire moyen. La tendance est inverse entre l'année 1 et l'année 2 (hausse des salaires de chaque catégorie mais baisse du salaire moyen) et cette tendance est plus forte que la précédente expliquant le coefficient inférieur à 1 si on considère globalement la période de deux ans.

Chapitre 4

Vocabulaire de la statistique

Exercice 4.1

1. On étudie les 18 pays de l'Europe occidentale en 1992.
2. On dispose de trois variables, la superficie et la population, variables quantitatives et l'appartenance à la CEE qui est par contre qualitative. La superficie est une variable clairement continue alors que le nombre d'habitants d'un pays étant un entier, on peut considérer cette variable comme discrète. Cependant, devant le nombre de valeurs qu'elle peut prendre, on la traitera souvent comme une variable continue. On remarque d'ailleurs que les données sont sous forme décimale puisqu'exprimées en millions d'habitants.

Exercice 4.2

1. état matrimonial : qualitative nominale de modalités *célibataire, marié, divorcé, veuf*,...
2. couleur des yeux : qualitative nominale de modalités *bleue, marron, vert*,...
3. taux de cholestérol : quantitative continue.
4. âge : quantitative qu'on considère le plus souvent comme continue.
5. poids : quantitative continue.
6. région de naissance : qualitative nominale de modalités *Bretagne, Ile de France, Centre*....
7. mention au baccalauréat : qualitative ordinale de modalités *P, AB, B, TB*.

Exercice 4.3

Toutes les variables peuvent être considérées comme continues mis à part le nombre d'enfants par ménage.

Chapitre 5

Les représentations graphiques

Sont ajoutés aux solutions les calculs de résumés sur les variables quantitatives.

Exercice 5.1

On reprend le tableau en calculant les proportions à représenter :

Pays	production	prop(%)
U.S.A.	5262	49,4
ex-U.R.S.S.	2415	22,7
Canada	1347	12,6
Japon	1099	10,3
France	536	5
Total	10 659	100

La mesure en degré du secteur angulaire représentant les USA par exemple, correspond à $49,4\% \times 360 \approx 177,8^\circ$ et le diagramme en secteurs est représenté figure 5.1.

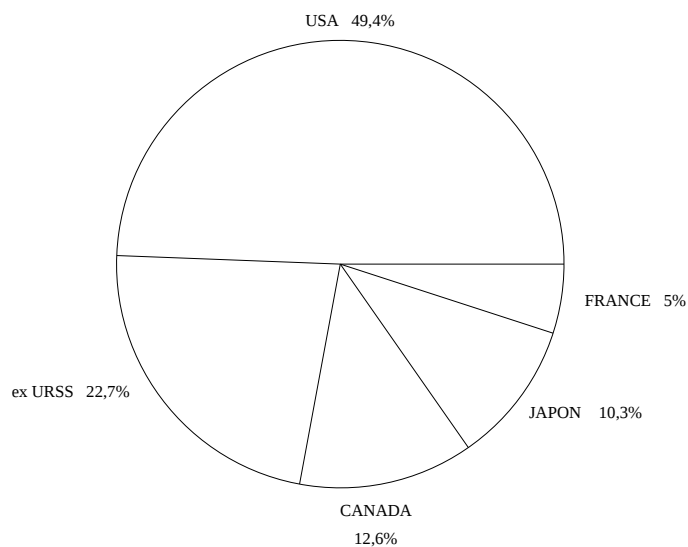


FIG. 5.1 – Production d'aluminium

Exercice 5.2

On complète le tableau par celui des fréquences de chaque modalité :

Type de consommation	consommation (millions de TEP)	Proportion (%)
Charbon	20,3	9,3
Pétrole	91,4	41,8
Gaz Naturel	27,6	12,6
Nucléaire	59,2	27,1
Hydrolique	15,7	7,2
Energies nouvelles	4,2	1,9
TOTAL	218,4	100

On peut représenter un diagramme en barres en ordonnant les modalités dans l'ordre décroissant des fréquences (figure 5.2).

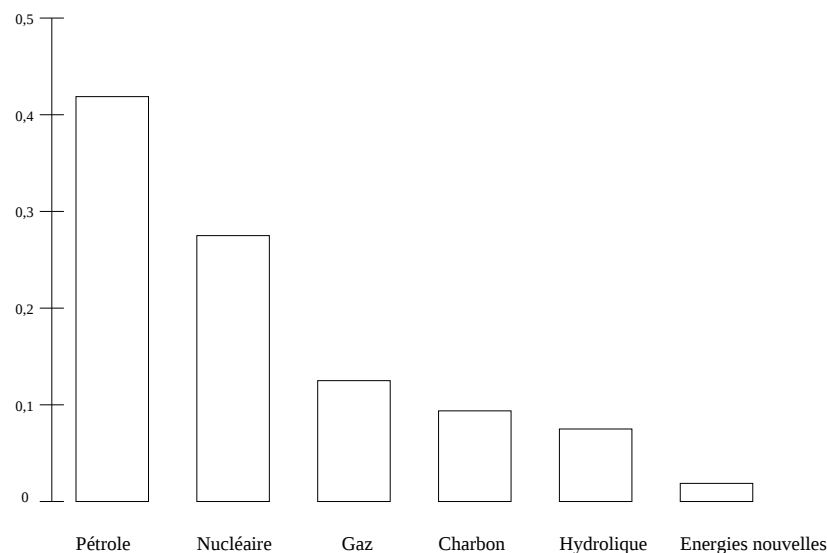


FIG. 5.2 – Consommation d'énergie en France en 1990

Remarque

Vous aurez sans doute remarqué que, dans les deux exercices précédents, je n'ai demandé de décrire ni la population ni la variable et vous vous serez probablement dit qu'il s'agissait d'un oubli de ma part...

En fait l'omission était délibérée car répondre à ces questions n'est pas si simple que ça en a l'air.

Raisonnons sur l'exercice qui vient d'être traité :

Si représenter les données comme on vient de le faire est tout à fait naturel, cela revient par contre à considérer que la variable est une variable qualitative ayant pour modalités l'appartenance à l'une des six catégories de consommation d'énergie présentées.

Mais si la variable est qualitative, quelle est donc la population et quels en sont ses individus ?

Se poser cette question revient à se demander quels sont les éléments sur lesquels on observe l'appartenance à l'une ou l'autre de ces catégories. La seule réponse satisfaisante qui me vienne est de considérer que la population est formée des 218,4 millions d'unités énergétiques (TEP) sur lesquelles on "observe" la "façon dont elles ont été consommées"... La démarche est, je vous l'accorde, un peu alambiquée mais elle permet de rester en accord avec la représentation faite.

Mais pourquoi ne pas considérer plutôt la population formée des six types de consommation sur lesquels on observe la quantité d'énergie consommée ? Cela semble à-priori beaucoup plus simple...

La variable (quantité d'énergie consommée) est désormais quantitative continue ce qui suggère la représentation sous forme d'histogramme. Mais où sont alors les classes à porter sur l'axe horizontal ? Puisqu'il n'y en a pas, on peut toujours les inventer... et considérer par exemple, que deux individus (énergie hydrolique et énergies nouvelles) "consomment" moins de 20 millions de TEP, deux individus (gaz et charbon) "consomment" entre 20 et 50 millions de TEP et les deux derniers individus consomment plus de 50 millions de TEP, mais cela pose plusieurs problèmes dont le principal est que la représentation, ne permettant plus d'identifier les individus, n'a dans cet exemple plus aucun intérêt...

Exercice 5.3

La population étudiée est l'ensemble des personnes non scolarisées en France en 1999. La variable est le diplôme, variable qualitative nominale dont les sept modalités sont données dans le tableau ci-dessous. On peut représenter les fréquences dans un diagramme en barres (figure 5.3).

Niveau d'étude	Effectif	Fréquence(%)
CAP BEP	10 592 142	24,8
Aucun diplôme	8 511 666	20
CEP	7 369 796	17,3
Bac ou brevet professionnels	5 201 118	12,2
Diplômes supérieurs	3 869 032	9,1
BAC+2	3 633 680	8,5
BEPC	3 467 522	8,1

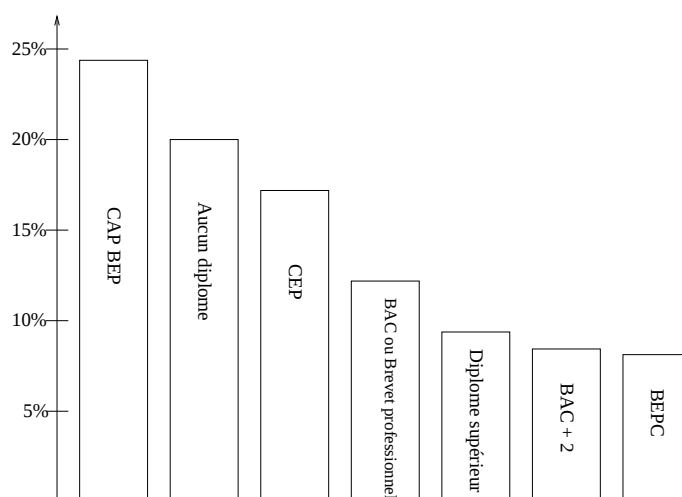


FIG. 5.3 – Diplômes de la population française non scolarisée au recensement de 1999

Exercice 5.4

On fera deux diagrammes en bandes, un pour l'année 1990 et un autre pour l'année 2001 (figure 5.4 page 20) en s'aidant des pourcentages calculés dans le tableau suivant.

Pays Riches	PIB 1990	PIB 2001
Amérique du nord	43,3%	51,9%
Union Européenne	47,1%	38%
Autre pays riches (sauf Japon)	9,6%	10,1%

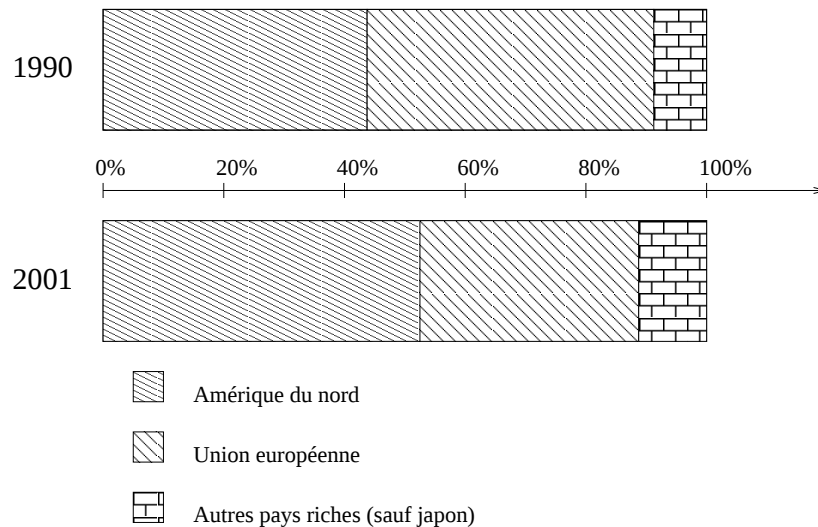


FIG. 5.4 – Evolution de la répartition du PIB dans les pays riches entre 1990 et 2001

On constate que la part de l'Europe s'est réduite (-9% environ) principalement au profit de l'Amérique du nord.

Exercice 5.5 (Paradoxe de Simpson)

1. La population est celle des étudiants candidatant à la "graduate school" de Berkeley en 1973.
2. Nous disposons d'un tableau qui croise trois variables : le sexe des candidats, la section demandée (arts ou sciences) et le résultat de la candidature (réussite ou échec). Ces trois variables sont qualitatives.
3. Le taux de réussite des hommes est 44,6% alors que celui des femmes est de 34,9%. Le taux de réussite aux examens d'entrée est donc supérieur pour les hommes.
4. Que se soit pour l'entrée en faculté d'arts ou de sciences, le taux de réussite est supérieur chez les femmes que chez les hommes (28,125% contre 28% en arts et 54,5% contre 51,7% en sciences).
5. Les conclusions semblent en effet contradictoires mais on comprend mieux en observant que les femmes se portent majoritairement vers la faculté d'arts où les taux de réussite sont plus faibles que celle de sciences qui attire la plupart des hommes. On peut résumer en disant que les femmes ont de meilleurs taux de réussite que les hommes mais qu'elles choisissent des études plus sélectives.

Exercice 5.6

Tableau de la répartition des exploitations viticoles du canton en fréquences et fréquences cumulées.

Superficie en ha	Effectif	Fréquence(%)	Fréquence cumulée(%)
De 0 à moins de 5 ha	15	10	10
De 5 à moins de 8	18	12	22
De 8 à moins de 11	17	11,3	33,3
De 11 à moins de 13	30	20	53,3
De 13 à moins de 14	27	18	71,3
De 14 à moins de 17	19	12,7	84
De 17 à moins de 25	24	16	100

1. La variable étudiée est la superficie des surfaces vinicoles dans un canton français. C'est une variable quantitative continue.
2. Les valeurs possibles s'étendent de 0 à 25 ha et la variable étant continue, il a été fait un partage en sept classes.
3. La population est constituée des 150 exploitations vinicoles du canton.
4. On représente la répartition sous forme d'histogramme de fréquences en figure 5.5 page 21.

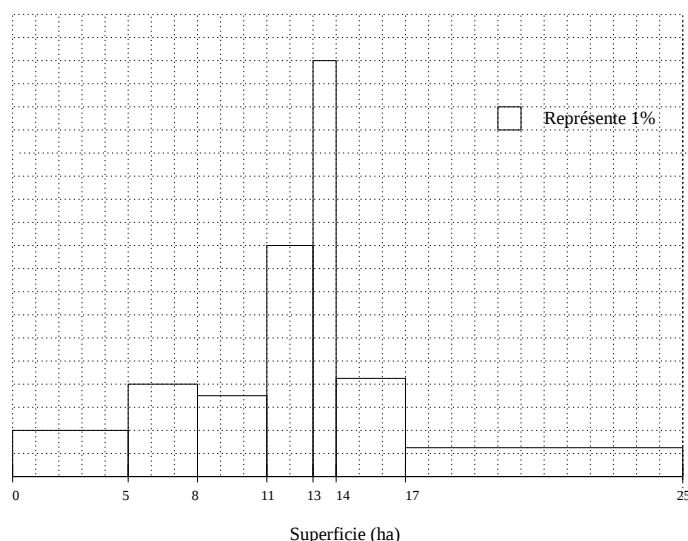


FIG. 5.5 – Répartition des surfaces vinicoles d'un canton selon leur superficie

5. Diagramme cumulatif en figure 5.6 page 22.
6. Le pourcentage d'exploitations de moins de 10 ha lu sur l'axe des ordonnées (trait gras) est environ 30%.
7. Environ 75% des exploitations font moins de 15 ha (trait gras hachuré) donc environ 45% des exploitations ont une superficie comprise entre 10 et 15 ha.
8. **Calcul des résumés numériques : mesures de tendance centrale**

Nous ne disposons pas de toutes les observations puisqu'elles ont été partagées en classes et ne pouvons donc pas calculer de façon exacte les principaux résumés numériques associés à cette série. On peut cependant en faire des calculs approchés.

(a) Calcul de la médiane :

On la détermine de façon approchée en faisant une interpolation linéaire comme illustré sur la figure 5.7 page 23.

On applique simplement le théorème de Thalès :

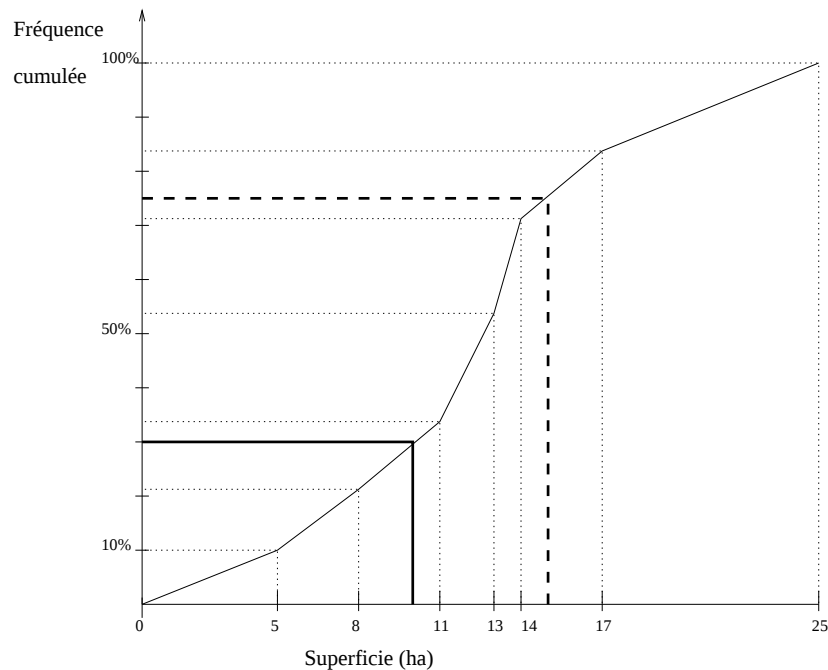


FIG. 5.6 – Répartition des surfaces vinicoles, diagramme cumulatif

$$\frac{AB}{AC} = \frac{EB}{DC} \Leftrightarrow \frac{M - 11}{13 - 11} = \frac{0,5 - 0,333}{0,533 - 0,333}$$

d'où $M = 12,67$ ha. On conclut donc que la moitié des exploitations de ce canton mesure moins de 12,67 ha environ et l'autre moitié plus de 12,67 ha.

(b) Calcul de la moyenne :

Reprenons le tableau des fréquences. Nous lisons par exemple que 10% des exploitations ont une superficie comprise entre 0 et 5 ha et n'ayant pas d'informations sur leur répartition dans cette classe, nous considérons pour calculer la moyenne, que la répartition y est uniforme ce qui revient (pour le calcul de la moyenne) à considérer qu'elles ont toutes une superficie égale au centre de la classe soit 2,5 ha. Ainsi, en reprenant les notations du cours, $f_1 = 10\% = 0,1$ et $c_1 = 2,5$ et comme il y a sept classes, on calcule la moyenne $\bar{x}$ par :

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^7 f_i \times c_i = 12,3 \text{ ha.}$$

(c) Précisons enfin, pour ce qui est des mesures de tendance centrale que la classe modale est 11-13.

Remarque

Notons que si l'on reporte ces trois valeurs sur l'axe horizontal de l'histogramme page 21, elles se trouvent bien dans sa zone centrale.

9. Calcul des résumés numériques : mesures de dispersion

- L'étendue est de 25 ha.
- La variance (moyenne des carrés des écarts à la moyenne) mesure les écarts à la moyenne et comme son calcul suppose qu'on connaisse la moyenne, on ne peut que l'approcher.

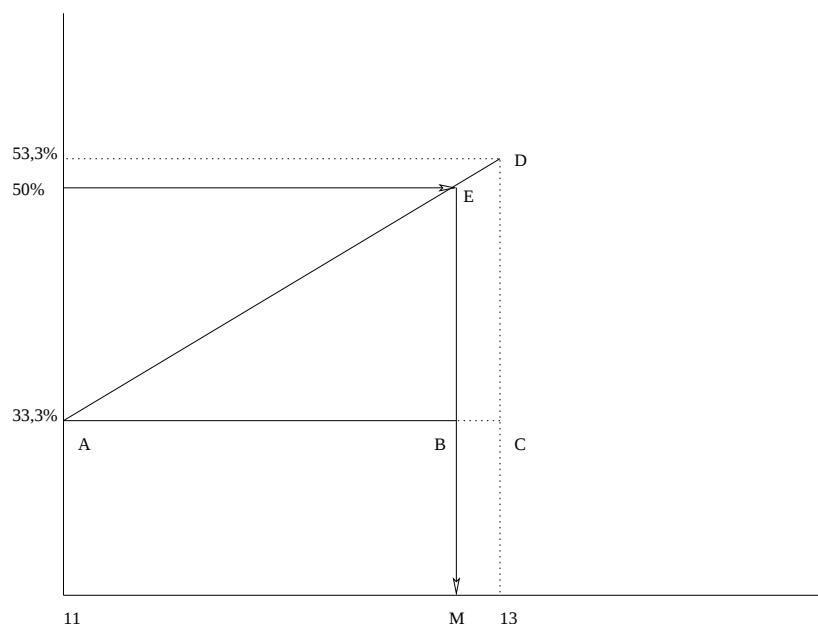


FIG. 5.7 – Détermination graphique de la médiane

Rappelons les formules :

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum x_i^2 - \bar{x}^2 \text{ si on a toutes les observations,}$$

$$\sigma^2 \approx \sum f_i(c_i - \bar{x})^2 = \sum f_i c_i^2 - \bar{x}^2 \text{ si les données sont regroupées par classes.}$$

On utilise la seconde formule pour trouver : $\sigma^2 \approx 28,21$.

- On détermine les quartiles Q_{25} et Q_{75} de la même façon que la médiane et on trouve $Q_{25} \approx 8,78$ et $Q_{75} \approx 14,87$. Notons que la moitié des exploitations sont dans l'intervalle interquartiles, c'est à dire entre 8,78 et 14,87 ha de superficie.

Exercice 5.7

Attention : le fait de considérer que la borne supérieure est un âge révolu revient à considérer que par exemple, les individus de la première classe en font partie jusqu'au jour de leur 25 ans. Ainsi, la largeur de cette classe est de 5 ans et son centre est 17,5 ans.

On étudie en Bretagne, la population des employés hommes suivant leur âge. Cette variable étant continue, elle est partagée en classes et ces classes n'ayant pas la même amplitude, la représentation sous forme d'histogramme est la plus adaptée : on élimine donc du choix les schémas 1 et 4.

Complétons le tableau par les fréquences et les densités associées à chaque classe :

Age*	Effectif	Fréquence(%)	densité
20-24	37842	6,3	1,26
25-34	167194	27,7	2,77
35-44	187346	31,1	3,11
45-54	167794	27,8	2,78
55-59	43171	7,2	1,44

* la borne supérieure est un âge révolu.

On constate que sur l'histogramme, la hauteur associée à la classe 45-54 doit être presque deux fois plus grande que celle associée à la classe 55-59 et seul le schéma 2 respecte cette contrainte.

Calcul des résumés numériques

1. Indicateurs de tendance centrale :
 - La classe modale est [35-45[puisque c'est celle qui a la densité la plus forte.
 - La médiane se trouve dans cette classe et par interpolation linéaire, on obtient : 40,1 ans soit 40 ans et un peu plus d'un mois.
 - L'âge moyen est calculé à partir du milieu des classes et on trouve environ 41,2 ans.
2. Indicateurs de dispersion
 - L'étendue est de 40 ans.
 - $Q_{25} \approx 31,8$ ans soit environ 32 ans et $Q_{75} \approx 48,6$ ans.
 - $\sigma^2 \approx 112$.

Exercice 5.8

1. D'après ce diagramme en barres, on est tenté de croire que la tranche de salaire la plus importante est 1070-1520.
2. La variable étudiée (salaire) est quantitative continue, il est plus adapté de représenter les données par un histogramme.
3. Représentation figure 5.8 page 24.

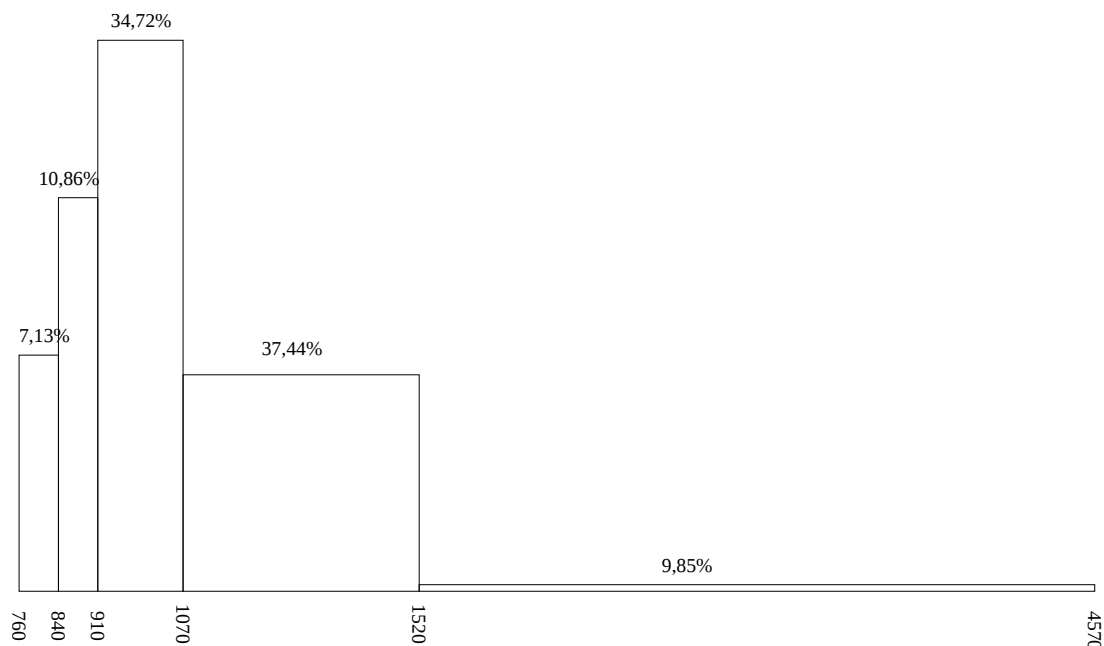


FIG. 5.8 – Histogramme des salaires dans une entreprise (*l'échelle utilisée n'est pas respectée pour la dernière classe*)

4. Sur l'histogramme, c'est la tranche 910-1070 qui semble la plus importante. On peut finalement dire que la tranche 1510-1520 est celle qui compte le plus grand nombre de salariés mais que la tranche 910-1070 est la plus dense.

5. Résumés numériques de tendance centrale

- La classe modale est celle qui a la plus grande densité donc c'est la tranche 910-1070.
- Par interpolation linéaire on trouve un salaire médian 1 057,5 euros.
- Le salaire moyen est 1 280,6 euros. Noter que la différence est assez importante en salaire moyen et salaire médian. Il faut se souvenir que la moyenne est sensible aux valeurs extrêmes et dans ce cas, la dernière classe augmente beaucoup la moyenne du fait de l'importance de sa taille.

6. Résumés numériques de dispersion

- L'étendue est de 3 810 euros.
- Par interpolation linéaire, on obtient $Q_{25} \approx 942,3$ euros et $Q_{75} \approx 1\,337,9$ euros. 50% des salariés gagnent donc entre 942,3 euros et 1 337,9 euros.
- $\sigma^2 \approx 370\,373,7$.

Exercice 5.9 (Durée de vie de piles)

1. Regroupement en classes :

	Durée de vie en mn				
classes	58-63	63-68	68-73	73-78	78-83
Effectifs	3	5	1	10	1
Fréquence(%)	15	25	5	50	5

2. Les classes sont toutes de même amplitude, l'histogramme se confond donc avec un diagramme en barres dont les classes sont accolées (figure 5.9 page 25).

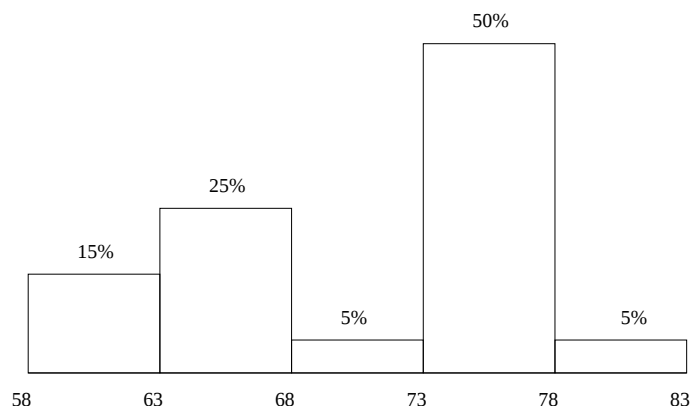


FIG. 5.9 – Durée de vie de piles

3. Résumés numériques

On peut calculer les résumés exactement à partir des données fournies par l'énoncé

- La classe modale est 73-78 mn.
- La durée de vie médiane d'une pile est 74 mn.
- La durée de vie moyenne d'une pile est 70,45 mn. Notons que cette moyenne est peu représentative de la série puisqu'elle se situerait dans une classe fort peu représentée (la classe 68-73 ne représente que 5% des piles sur cet échantillon). L'explication vient du fait que la série s'organise principalement de part et d'autre de son centre, celui-ci n'étant que peu représenté (compléments en figure 5.10 page 26).

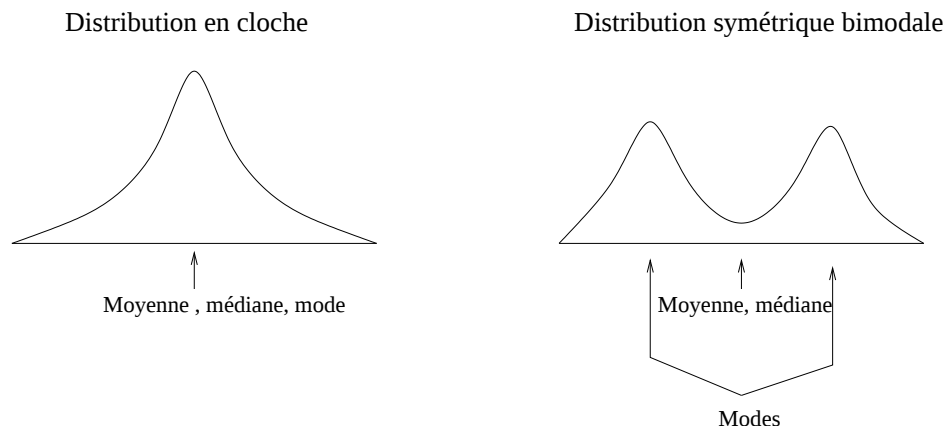


FIG. 5.10 – Résumés de tendance centrale et allure de la répartition

Exercice 5.10

Tableau donnant le nombre de pièces du logement de l'habitation principale pour chaque ménage français complété par les fréquences et les fréquences cumulées.

Nombre de pièces de l'habitation principale	1 pièce	2 pièces	3 pièces	4 pièces	5 pièces	6 pièces ou plus
Nombre de ménages	1 526 573	3 028 244	5 299 675	6 418 808	4 432 943	3 103 918
Fréquences(%)	6,4	12,7	22,3	27	18,6	13
Fréquences cumulées(%)	6,4	19,1	41,4	68,4	87	100

1. La variable est le nombre de pièces de l'habitation principale, variable à priori quantitative discrète prenant les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6, Le fait que la dernière modalité (6 pièces ou plus) soit une catégorie nous oblige à la considérer comme qualitative (le calcul de la moyenne n'est pas possible) ordinale.
2. La population recensée est l'ensemble des ménages français en 1999.
3. On peut représenter les fréquences dans un diagramme en barres (figure 5.11 page 27).
4. Représentation des fréquences cumulées figure 7.1 page 32.
5. Résumés numériques
 - Le mode est la modalité "4 pièces" tout comme la médiane.
 - On ne peut calculer ni la moyenne ni la variance à moins de limiter arbitrairement la dernière classe (à 8 pièces par exemple).

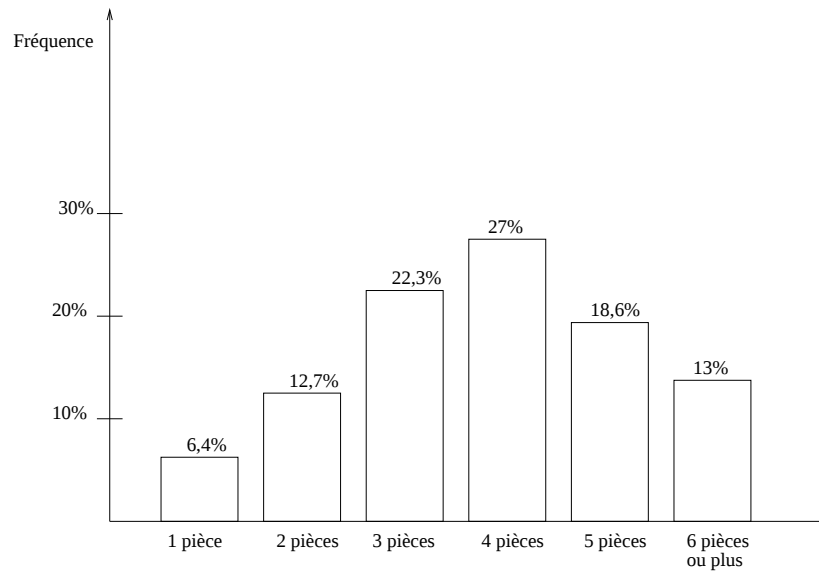


FIG. 5.11 – Nombre de pièces de l’habitation principale des ménages français

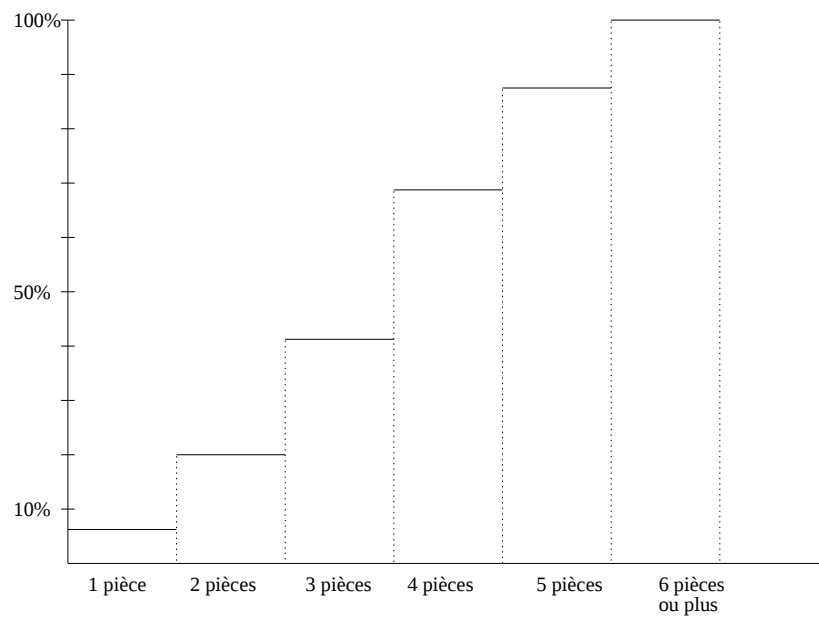


FIG. 5.12 – Nombre de pièces de l’habitation principale des ménages français, fréquences cumulées

Chapitre 6

Résumés numériques

Le calcul des résumés a été fait comme compléments aux exercices du chapitre précédent.

Chapitre 7

concentration

Exercice 7.1 (Concentration des salaires)

1. On étudie le salaire (variable quantitative continue à valeurs positives) dans deux entreprises.
2. On note n_j l'effectif et x_j le salaire dans la classe j . La masse salariale est la somme de tous les salaires soit,
 - pour l'entreprise A :

$$\sum_{j=1}^5 n_j^A x_j^A = 1,945 \text{ millions d'euros}$$

- pour l'entreprise B :

$$\sum_{j=1}^5 n_j^B x_j^B = 1,945 \text{ millions d'euros}$$

Les deux entreprises ont donc les mêmes masses salariales.

Calcul pour chaque salaire de la masse salariale correspondante

Entreprise A			Entreprise B		
effectif	salaire	masse salariale	effectif	salaire	masse salariale
50	900	45000	450	900	405000
200	1000	200000	255	1000	255000
400	2000	800000	50	2000	100000
300	2500	750000	4	178750	715000
50	3000	150000	1	470000	470000

TAB. 7.1 – Salaires et masses salariales en euros dans 2 entreprises A et B

3. Pour tracer les courbes de concentration des deux entreprises (figure 7.1 page 32), il nous faut les fréquences cumulées par classes de salaires et les fréquences cumulées de masses salariales .

Salaire	Effectif	Cumul	% cumulés	Masse salariale	Cumul	% cumulé
900	50	5	5	450 000	45 000	2,3
1 000	200	20	25	200 000	245 000	12,6
2 000	400	40	65	800 000	1 045 000	53,7
2 500	300	30	95	750 000	1 795 000	92,3
3 000	50	5	100	150 000	1 945 000	100

TAB. 7.2 – Entreprise A

Salaire	Effectif	Cumul	% cumulés	Masse salariale	Cumul	% cumulé
900	450	59,2	59,2	405 000	405 000	20,8
1 000	255	33,6	92,8	255 000	660 000	33,9
2 000	50	6,6	99,4	100 000	760 000	39,1
178 750	4	0,5	99,9	715 000	1 475 000	75,8
470 000	1	100	100	470 000	1 945 000	100

TAB. 7.3 – Entreprise B

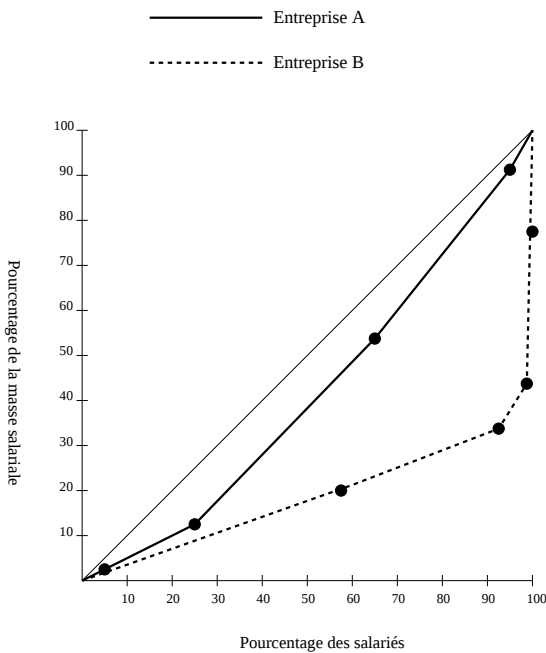


FIG. 7.1 – Courbes de lorentz des entreprises A et B

4. C'est l'entreprise B qui a les salaires les plus concentrés, sa courbe de Lorentz étant plus éloignée de la première bissectrice qui représente un partage strictement égalitaire des richesses.

Exercice 7.2 (Concentration des dépenses de santé)

1. On étudie les dépenses de santé sur une population de 4 517 assurés sociaux en 1995.

2. Reprenons la première information : “un quart de la population concentre à peu près 80% des dépenses en soins médicaux”. On en déduit 75% de la population concentre 20% des dépenses de santé ; ainsi le point $(0,75 ; 0,2)$ est sur la courbe de concentration. De même, on obtient les points $(0,95 ; 0,5)$ et $(0,9 ; 0,4)$
3. Tracé de la courbe de concentration des dépenses de santé :

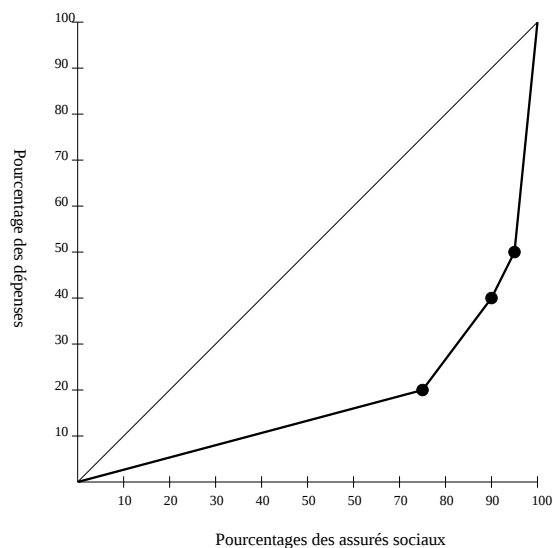


FIG. 7.2 – Courbe de lorentz des dépenses de santé

4. Pour calculer l'indice de Gini, nous procéderont par différence c'est à dire que nous calculerons la somme des aires des zones A, B, C et D représentées en figure 7.3 que nous oterons à 0,5 qui est l'aire du triangle situé sous la première bissectrice. Il suffira ensuite de calculer le double de cette valeur pour obtenir l'indice de Gini.

$$A_a = \frac{0,2 \times 0,75}{2} = 0,075$$

$$A_c = \frac{(0,4+0,5) \times (0,95-0,9)}{2} = 0,0225$$

$$A_b = \frac{(0,2+0,4) \times (0,9-0,75)}{2} = 0,045$$

$$A_d = \frac{(0,5+1) \times (1-0,95)}{2} = 0,0375$$

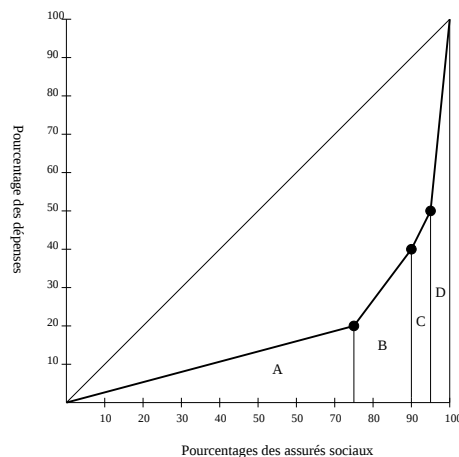


FIG. 7.3 – Calcul de l'indice de Gini

Ainsi, avec les valeurs calculées,

$$\text{Gini} = 2 \times (0,5 - (0,075 + 0,045 + 0,0225 + 0,0375)) = 0,64$$

Exercice 7.3 (Concentration des surfaces rurales)

Si on s'intéresse à la répartition de la surface rurale (variable) entre les personnes privées (population), les premières données (superficie totale, part de la surface rurale, proportion détenue par un organisme public) ne sont pas utiles.

Il s'agit de représenter en pourcentage, la superficie rurale cumulée en fonction de la part cumulée des personnes privées. On peut schématiser la situation de deux manières (figure 7.4 page 35) et on représente la courbe de concentration après avoir "inversé" les données du texte (figure 7.5 page 35).

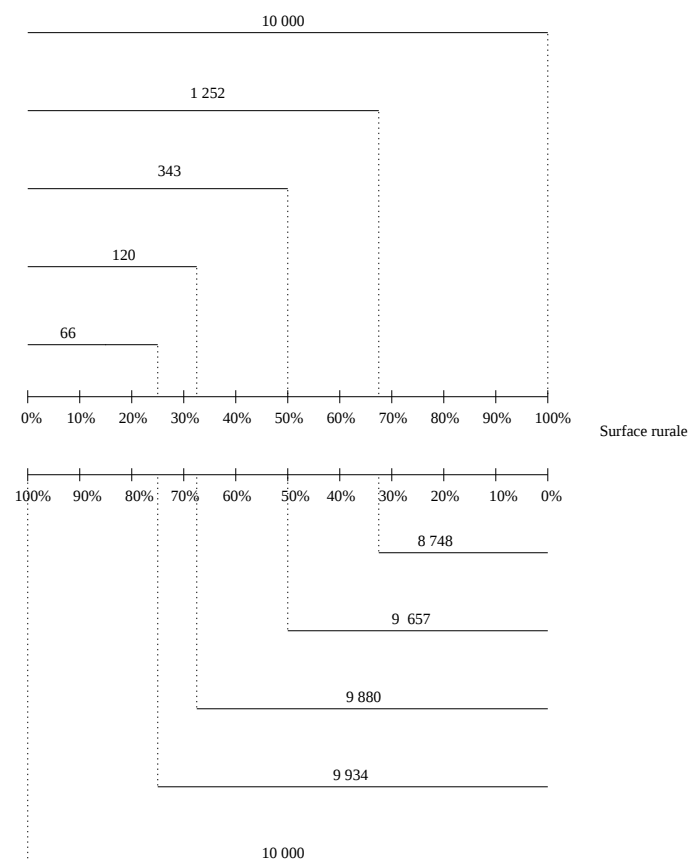


FIG. 7.4 – Répartition de la surface rurale entre les personnes privées en Ecosse

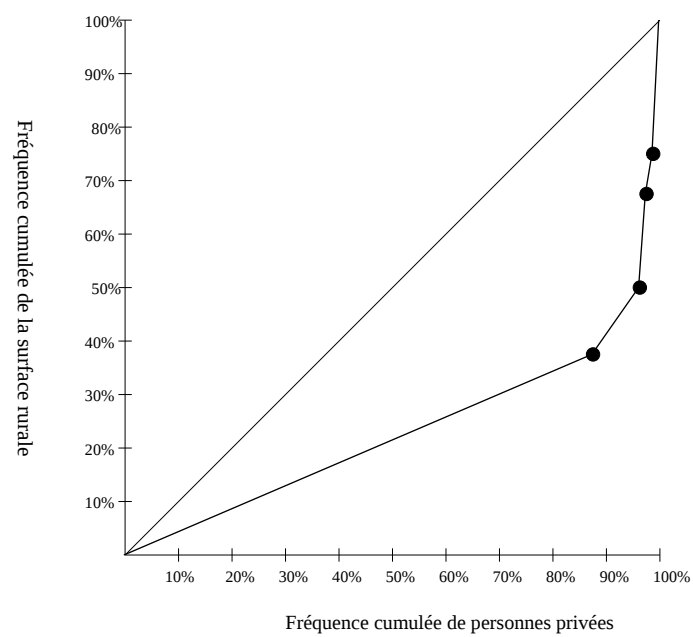


FIG. 7.5 – Courbes de concentration

Exercice 7.4

1. Nous disposons de la répartition par classes des revenus des habitants de cette ville de 3000 habitants. Pour calculer le revenu moyen, nous confondons chaque classe avec son centre comme dans l'exercice précédent. Ainsi,

$$\bar{x} = \frac{6,5 \times 7500 + 23,8 \times 15000 + \dots + 150000 \times 2,7}{100} = 31890$$

Le revenu moyen s'élève donc à 31 890 euros.

Déterminons par le calcul le revenu médian : 34,8% des habitants ont un revenu inférieur à 20 000 euros et 65,1% inférieur à 30 000 euros. La médiane se situe entre ces deux revenus et une interpolation linéaire donne :

$$\frac{Me - 20000}{30000 - 20000} = \frac{50 - 34,8}{65,1 - 34,8} \Rightarrow Me = 25016,5 \text{ euros.}$$

2. Pour tracer la courbe de concentration il faut calculer la masse des salaires relative à chaque classe puis en faire les cumuls. On complète pour plus de facilité le tableau suivant pour aboutir à la courbe de concentration représentée en page 37 :

classes j centres c_j	effectifs $n_j = f_j \times 3000$	fréquence f_j (%)	fréquences cumulées	masse salariale $n_j \times c_j$	pourcentage de la masse salariale cumulée
7 500	195	6,5	6,5	1 462 500	1,53
15 000	849	28,3	34,8	12 735 000	14,84
25 000	909	30,3	65,1	22 725 000	38,59
35 000	450	15	80,1	15 750 000	55,05
50 000	327	10,9	91	16 350 000	72,14
67 500	102	3,4	94,4	6 885 000	79,34
87 500	87	2,9	97,3	7 612 500	87,3
150 000	81	2,7	100	12 150 000	100

L'aire hachurée à partir de la courbe de concentration représente la moitié de l'indice de Gini. On peut déduire l'aire de ce polygone de l'aire sous la courbe de concentration car celle-ci s'obtient en sommant les aires de huit trapèzes (ou sept trapèze et un triangle) comme expliqué en figure 7.7.

L'aire d'un trapèze est donnée par la formule

$$\mathbb{A} = \frac{(\text{petite base} + \text{grande base}) \times \text{hauteur}}{2}$$

ce qui, dans le cas du trapèze $ABCD$ représenté, donne

$$\mathbb{A} = \frac{(AD + BC) \times AB}{2} \text{ avec } AD = 14,84\% , BC = 38,59\% \text{ et } AB = 65,1\% - 34,8\% = 30,3\%$$

d'où finalement $\mathbb{A} = 0,08$. Ainsi, l'aire sous la courbe de concentration est 0,32 et on déduit que l'indice de Gini vaut 0,36.

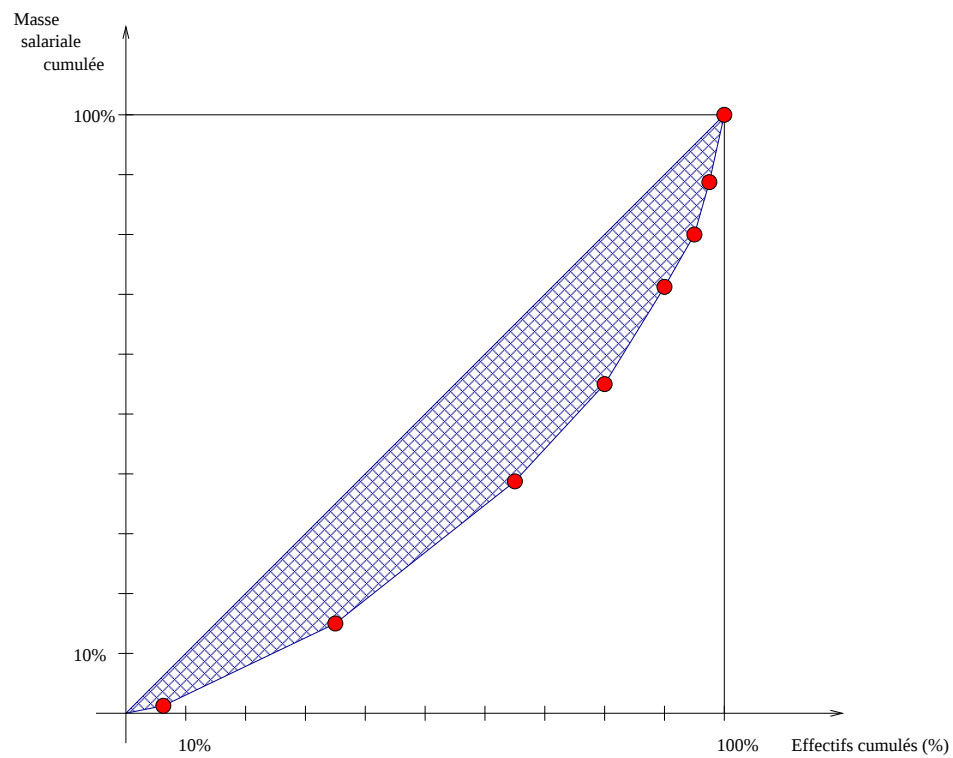


FIG. 7.6 – Courbe de concentration

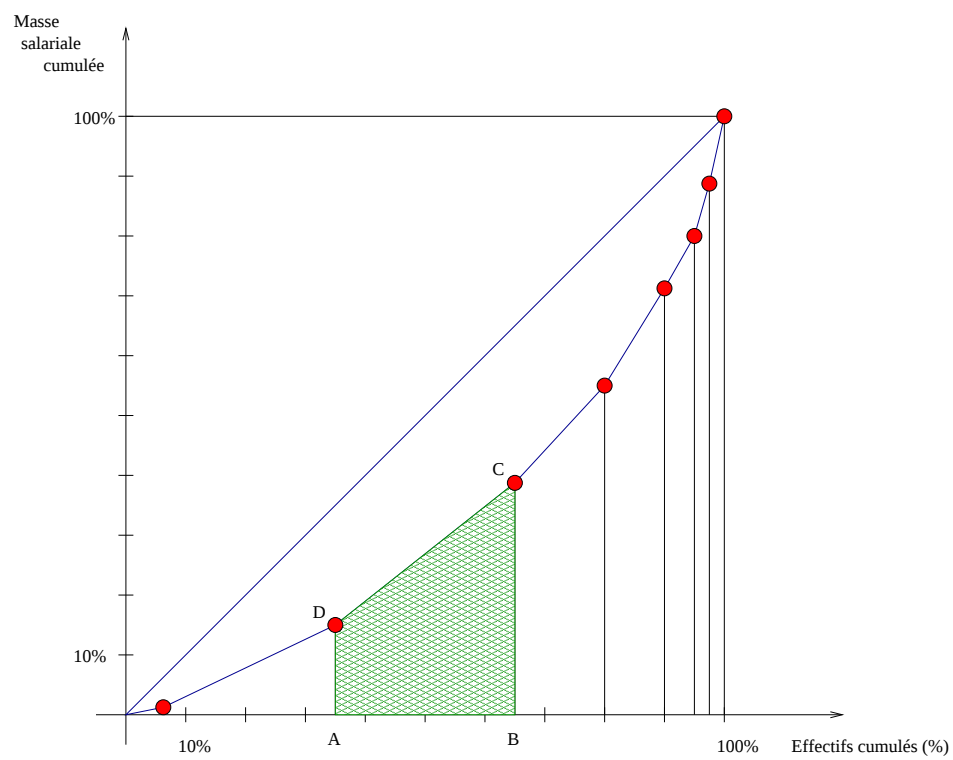


FIG. 7.7 – Coefficient de Gini