

# Contents

Prise en main du logiciel	3
Fonctions usuelles	4
Suites numériques	7
Etudes des fonctions	14
Développements limités	20
Intégration	22



## Prise en main du logiciel

### Exercices

#### Edition d'équations

Editer les équations suivantes :

1.  $\frac{x-3a^2}{-4+\sqrt{y+1}+\pi}$
2.  $x^3 + \frac{1}{a+b}x^{c+d} - \sqrt{x+1} + 1$
3.  $\left(\frac{a+b}{a-b}\right) \times c$
4.  $\cos(\omega t + \varphi)$
5.  $\exp\frac{x-3a^2}{-4+\sqrt{y+1}+\pi}$

#### Définition d'une fonction

1. Définir la fonction  $f$  des deux variables  $x$  et  $y$  définie par :

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

2. Calculer l' image du couple  $(2,3)$  puis du couple  $(i, 2i)$ .

#### Quelques calculs

1. Décomposer 504 en produit de facteurs premiers
2. Déterminer la racine carrée complexe de  $-2$
3. Déterminer l'argument et le module de  $-1 + i$
4. Retrouver les formules d'additions :  $\cos(a + b)$  et  $\sin(a + b)$
5. Calculer la primitive de la fonction  $x \rightarrow \ln(x)$

#### Représentation d'une fonction à une variable

1. Représenter, sur  $[-10; 5]$ , la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 1$ .
2. Changer la fenêtre de sorte à observer les racines réelles de  $f$ .
3. Déterminer les variations de  $f$ .

#### Transformation d'un nombre complexe

1. Développer  $(x + y)^5$  et  $(x - y)^5$
2. Simplifier

$$\frac{(1 - i)^5 - 1}{(1 + i)^5 + 1}$$

3. Retrouver sur feuille la simplification précédente en utilisant le résultat obtenu en première question

## Fonctions usuelles

### Fonction(s) inverse(s)

1. Représenter la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \frac{1}{x}$ .
2. Vérifier que la courbe de  $f$  présente un centre de symétrie.
3. Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $g(x) = 1 + \frac{1}{x}$ . Par quelle transformation géométrique déduit-on la courbe de  $g$  de celle de  $f$  ?
4. Soit  $h$  la fonction sur  $\mathbb{R}^*$  par  $h(x) = -\frac{1}{x}$ . Par quelle transformation géométrique déduit-on la courbe de  $h$  de celle de  $f$  ?
5. Soit  $l$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} - \{-2\}$  par  $l(x) = \frac{1}{x+2}$ . Par quelle transformation géométrique déduit-on la courbe de  $l$  de celle de  $f$  ?

### Encore une fonction inverse

On considère la fonction

$$\begin{cases} \mathbb{R} - \{-2\} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) = \frac{x+1}{x+2} \end{cases}$$

Montrer que l'on peut déduire la courbe de  $f$  de celle de la fonction inverse par une transformation géométrique simple. Faire l'étude de  $f$  i.e. déterminer les limites aux bornes du domaine de définition ainsi que les variations.

### Valeur absolue

1. Représenter la fonction  $x \mapsto |x|$ .
2. Définir la fonction  $f : x \mapsto a|x - b| + c$  où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des paramètres modifiables au clavier. En vous aidant de cette programmation, retrouvez l'expression de la fonction représentée en figure 1.
3. Résoudre  $f(x) \leq -1$ .

### Une fonction racine

Soit la fonction  $f$  définie sur  $[1, +\infty[$  par

$$f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}}$$

Le but est de simplifier l'expression de  $f(x)$ .

1. Représenter  $f$ .
2. Conjecturer l'expression de  $f(x)$ .
3. Vérifier par le calcul.

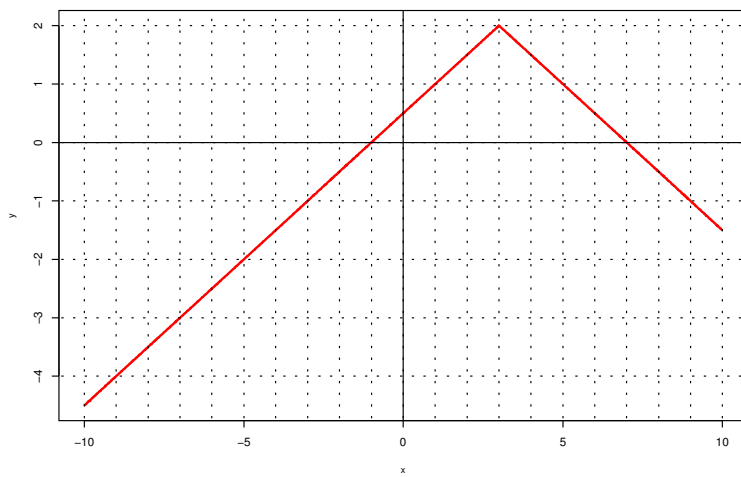


FIGURE 1 – Une fonction valeur absolue.

## Fonctions usuelles

### Valeur absolue

1. Représenter sur  $[-5, 5]$  la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2.$$

2. Déterminer les racines de  $f$ .
3. Représenter la fonction  $g = |f|$ .
4. Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les inéquations
  - (a)  $g(x) \leq 0$ ,
  - (b)  $g(x) > 1$ .
5. Résoudre le système

$$\begin{cases} g(x) & \geq \frac{5}{2} \\ x & \leq 1 \end{cases}.$$

### Fonctions périodiques

1. Représenter sur le même graphe et pour  $t \in [-2\pi, 2\pi]$ , les fonctions

$$f_1 : t \mapsto \cos(t) \quad f_2 : t \mapsto \sin(t) \quad f_3 : t \mapsto \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right).$$

2. Déterminer une relation entre  $f_1$ ,  $f_2$  puis entre  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$ .
3. Déterminer la période des fonctions

$$f_4 : t \mapsto \sin(15t) \quad f_5 : t \mapsto \sqrt{2} \cos(t/4).$$

4. Quelle est la période de la fonction  $f_4 + f_5$  ?

### Fonction logarithme, fonction exponentielle

1. Fonction  $\ln$

- (a) Représenter sur son ensemble de définition la fonction  $\ln$ .
- (b) Déterminer et représenter l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.
- (c) Etudier la position de la courbe de la fonction  $\ln$  par rapport à cette tangente.
- (d) Reprendre les deux questions précédentes avec la tangente en un point d'abscisse  $a$  quelconque.

2. Fonction  $\exp$

- (a) Représenter la fonction  $x \mapsto \exp(x)$ .
- (b) Par quelle transformation passe-t-on de la courbe de la fonction  $\ln$  à celle de la fonction  $\exp$  ?
- (c) Etudier la position de la courbe de la fonction  $\exp$  par rapport à la tangente à cette courbe en un point quelconque.

## Introduction sur les suites

### Rappels

On rappelle qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de nombre réels est une application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$(u_n) : \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow \mathbb{R} \\ n & \mapsto u_n \end{cases}$$

qui à tout indice  $n$  entier associe le terme  $u_n$ .

Dans ce qui vient d'être noté, l'indexation commence à  $n = 0$  (l'indice du premier terme est 0), mais l'indexation peut aussi commencer à  $n = 1$  faisant ainsi correspondre l'indice d'un terme et son rang. On remplace alors  $\mathbb{N}$  par  $\mathbb{N}^*$  dans l'écriture précédente.

Les suites peuvent être définies de deux façons :

- par récurrence c'est-à-dire par une relation du type  $u_{n+1} = f(u_n)$  qui permet le calcul des termes de proche en proche,
- par une relation explicite de la forme  $u_n = f(n)$  où le calcul du terme d'indice  $n$  ne suppose pas de connaître de termes qui le précèdent.

Par exemple la suite des nombres impairs  $(1, 3, 5, \dots)$  est définie par la relation de récurrence

$$u_1 = 1 \text{ et pour } n \geq 0, \quad u_{n+1} = u_n + 2$$

où bien par la forme explicite

$$\forall n \geq 0 \quad u_n = 2n + 1.$$

### Un exemple

On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  dont les premiers termes sont

$$u_0 = 1 \quad u_1 = 2 \quad u_2 = 4 \quad u_3 = 7 \quad u_4 = 11 \quad u_5 = 16 \quad \dots$$

#### 1. Définition par récurrence

- (a) Calculer "à la main" quelques termes supplémentaires.
- (b) En déduire la définition par récurrence de la suite  $(u_n)$ .
- (c) Programmer et représenter la suite.

#### 2. Forme explicite

- (a) Quelle relation de la forme  $u_n = f(n)$  suggère la représentation précédente ?
- (b) Définir une fonction  $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$  avec  $a$ ,  $b$  et  $c$  paramétrables au clavier.
- (c) A l'aide d'un graphe par exemple, déterminer la forme explicite de la suite  $(u_n)$ .

#### 3. Applications et calcul de la limite

- (a) Calculer  $u_{200}$ .
- (b) Montrer que la suite est croissante.
- (c) La valeur 3917 correspond-t-elle à un terme de la suite ? Et la valeur 83028 ?
- (d) On rappelle que l'on dit qu'une suite  $(u_n)$  tend vers l'infini et on note alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  si

$$\forall A > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq n_0, \quad u_n \geq A.$$

Montrer que c'est le cas dans l'exemple étudié.

### Suite arithmétique

1. Définir par récurrence et par la forme explicite une suite géométrique de premier  $u_0 = 1$  et de raison  $1/2$ .
2. Programmer une suite arithmétique de premier  $u_0 = b$  et de raison  $a$ ,  $a$  et  $b$  étant paramétrables au clavier.
3. Représenter quelques exemples.
4. Etudier la convergence d'une suite arithmétique.

## Suites

### Illustration de la définition d'une suite convergente

On rappelle la définition d'une suite convergente : la suite  $(u_n)$  converge vers la limite finie  $l$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon.$$

Le but des questions qui suivent est d'illustrer cette définition. Pour cela, on s'appuie sur la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$u_n = \frac{4n^2 - 1}{n^2 + 1}.$$

1. Représenter la suite et conjecturer sa limite  $l$ .
2. Graphiquement, déterminer à partir de quel rang  $n_0$  on observe  $|u_n - l| < \varepsilon$  pour  $\varepsilon = 0.1$ .
3. Même question avec  $\varepsilon = 0.01$ .
4. A l'aide du logiciel, déterminer, pour  $\varepsilon$  quelconque, l'indice  $n_0$  au delà duquel on  $|u_n - l| < \varepsilon$ .
5. Retrouver le calcul à la main.

### Suite divergente

1. Rappeler la définition d'une suite divergeant vers  $+\infty$ .
2. Soit la suite  $u$  définie pour  $n \in \mathbb{N}^*$  par

$$u_n = \frac{n^2 + 3n - 1}{n}.$$

- (a) A partir de quel rang a-t-on  $u_n \geq A$  pour  $A = 10$ ?
- (b) Même question avec  $A = 100$ .
- (c) Montrer que la suite diverge en revenant à la définition.

### Une suite définie par récurrence

Soit la suite  $(u_n)$  dont les premiers termes sont

$$u_0 = 0 \quad u_1 = \sqrt{3} \quad u_2 = \sqrt{3 + \sqrt{3}} \quad u_3 = \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}} \quad u_4 = \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}}}$$

1. Donner une définition par récurrence de la suite  $(u_n)$ .
2. La représenter.
3. On appelle  $l$  la solution positive de l'équation

$$x^2 = x + 3.$$

Déterminer  $l$ .

4. Vérifier graphiquement que la suite  $(u_n)$  est majorée par  $l$ .
5. Le prouver en raisonnant par récurrence.

## Suites

### Suites majorées - minorées - bornées

1. Rappel des définitions
  - (a) Rappeler la définition d'une suite majorée par  $M$ .
  - (b) Rappeler la définition d'une suite minorée par  $m$ .
  - (c) Rappeler la définition d'une suite bornée.
  - (d) Donner la définition d'une suite majorée à partir d'un certain rang.
  - (e) Donner la définition d'une suite minorée à partir d'un certain rang.
2. Exemples (on utilisera le logiciel pour vérifier)
  - (a) Donner un exemple de suite minorée par 0.
  - (b) Donner un exemple de suite minorée par 2.
  - (c) Donner un exemple de suite majorée par 2.
  - (d) Donner un exemple de suite majorée par 2 à partir de l'indice 3.
  - (e) Donner un exemple de suite bornée par  $-2$  et  $3$ .

### Etude d'une suite

Soit la suite  $(u_n)$  définie pour  $n \geq 1$  par  $u_n = 2 - \frac{1}{n}$ .

1. Montrer que la suite est majorée par 2.
2. Donner un autre majorant de la suite.
3. La suite est-elle minorée ?
4. Etudier les variations de la suite.
5. Rappeler la définition d'une suite de limite  $l$ .
6. En revenant à cette définition, montrer que la suite est convergente.
7. Pouvait-on justifier la convergence de la suite autrement ?

## Limite d'une suite définie par récurrence

Pour une suite définie par son premier terme  $u_0$  et une relation de la forme  $u_{n+1} = f(u_n)$ , il est classique, pour montrer que celle-ci converge vers une limite finie, de procéder de la manière suivante :

- On justifie l'existence d'une limite  $l$ .
- On utilise alors le fait cette limite vérifie  $l = f(l)$  pour trouver quelles sont les valeurs potentielles de  $l$ .
- Si l'équation  $l = f(l)$  admet plusieurs solutions, on réussit à isoler une seule limite possible parmi les solutions en montrant que les autres ne peuvent correspondre au problème.

On reprend la suite étudiée en TD 5, exercice 3.

1. Représenter quelques termes de la suite.
2. Montrer que la suite est minorée par 0.
3. Montrer que la suite est croissante.
4. Montrer que la suite est majorée par 3.
5. En déduire que la suite est convergente.
6. En résolvant  $x = f(x)$ , déterminer la limite de la suite.

## Etude d'une suite définie par récurrence

Etudier (variations, limite,...) la suite  $(u)_{n \geq 0}$  définie par

$$u_0 = 0.2 \quad u_{n+1} = \frac{1 + u_n^2}{2}.$$

## Suites adjacentes

Rappel : deux suites réelles  $(u_n)_{n \geq 1}$  et  $(v_n)_{n \geq 1}$  sont dites adjacentes si et seulement si :

$$\begin{cases} (u_n)_{n \geq 1} \text{ est croissante} \\ (v_n)_{n \geq 1} \text{ est décroissante} \\ v_n - u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{cases}$$

Si deux suites réelles  $(u_n)_{n \geq 1}$  et  $(v_n)_{n \geq 1}$  sont adjacentes, alors elles convergent et ont la même limite  $l$ , et on a

$$u_n \leq u_{n+1} \leq l \leq v_{n+1} \leq v_n.$$

### 0.1 Un exemple de suites adjacentes

On définit les suites  $(u_n)_{n \geq 1}$  et  $(v_n)_{n \geq 1}$  par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)}, \quad v_n = u_n + \frac{2}{n}.$$

- Représenter les deux suites.
- Montrer que les deux suites sont adjacentes.

### 0.2 Etude d'une suite oscillante et convergente

Soit la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par son premier terme  $u_1$  donné, réel strictement positif, et par la relation de récurrence suivante :

$$u_n = 1 + \frac{2}{u_{n-1}} \quad \text{pour tout } n > 1.$$

- Montrer que si  $u_1 > 0$ , alors tous les termes de la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  sont strictement positifs.
- Quelles sont les limites possibles pour  $(u_n)_{n \geq 1}$  ?
- Représenter la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  pour  $u_1 := 1$ ,  $u_1 := 2$  et  $u_1 := 3$ .  
Donner les premiers termes.
- Soit  $f(x) := 1 + \frac{2}{x}$  la fonction associée à la suite. Etudier la suite sur le graphe de cette fonction.

Dans les 2 questions suivantes, on retrouve à la main les résultats observés.

On définit les suites extraites

- $(a_n)_{n \geq 1} := (u_{2n})_{n \geq 1}$  sous-suite des termes de rang pair.
- $(b_n)_{n \geq 1} := (u_{2n-1})_{n \geq 1}$  sous-suite des termes de rang impair.

- 1) Définir et représenter les suites extraites pour  $u_1 := 1$ .  
Calculer les premiers termes de ces deux suites.  
Vérifier que l'une est croissante et l'autre décroissante.  
En déduire un majorant et un minorant de la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$ .  
Montrer que les 2 suites sont adjacentes et que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  converge vers 2.
- 2) Répondre aux mêmes questions pour  $u_1 := 3$ .

Dans la question suivante, on cherche une définition explicite de  $(u_n)_{n \geq 1}$ .  
Soit la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  définie à partir de la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  par la relation suivante :

$$v_n := \frac{u_n - 2}{u_n + 1} \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

- 1) Donner la relation de récurrence entre  $v_n$  et  $v_{n-1}$ .
- 2) En déduire la définition explicite de  $(v_n)_{n \geq 1}$  en fonction de  $n$  et  $v_1$ .
- 3) Donner la définition explicite de  $(u_n)_{n \geq 1}$  en fonction de  $n$  et  $u_1$ .

## Limites de fonctions

Nous allons illustrer deux définitions de limites

### Définition 1 : limite finie en l'infini

$f$  admet  $l$  pour limite en  $+\infty$  ssi :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0 \text{ tel que } x \geq N \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$$

On note  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  ou  $\lim_{\infty} f = l$

### Exercice 1

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} - \{-3/2\}$  par

$$f(x) = \frac{3x - 1}{2x + 3}$$

1. Représenter la fonction  $f$  et conjecturer la limite  $l$  de  $f$  en  $+\infty$ .
2. Réécrire l'inégalité  $|f(x) - l| \leq \epsilon$  sans le symbole de valeur absolue.
3. On fixe  $\epsilon = 1/10$ . Déterminer graphiquement la valeur de  $N$  telle que  $x \geq N \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$ .
4. Reprendre la question précédente avec  $\epsilon = 1/100$ .
5. Déterminer dans le cas général l'expression de  $N$  en fonction de  $\epsilon$  telle que  $x \geq N \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$  et montrer ainsi que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ .

### Définition 2 : limite finie en $a$

$f$  admet  $l$  pour limite en  $a$  ssi :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$$

### Définition 3 : limite infinie en $a$

$f$  admet  $+\infty$  pour limite en  $a$  ssi :

$$\forall M > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } |x - a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq M$$

### Exercice 2

On considère la fonction définie sur  $]2; +\infty[$  par

$$f(x) = \frac{(x - 1,99)^3}{x - 2}$$

et on cherche à étudier

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

– Recherche empirique de la limite.

1. Représenter  $f$ . Quelle est la limite suggérée par le graphique ?
2. Quelle est la limite donnée par le logiciel ?
3. Calculer  $f(2 + 10^{-5})$  puis  $f(2 + 10^{-10})$ .

– On pose  $x = 2 + h$  ainsi et on cherche donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(2 + h)$$

1. En reprenant la définition, énoncer la proposition à démontrer.
2. Utiliser le logiciel pour développer  $f(2 + h)$ .
3. Vérifier que “  $h > 0 \Rightarrow f(2 + h) > \frac{10^{-6}}{h}$  ”
4. En déduire, à  $M$  fixé, une valeur de  $\alpha$  qui convienne.

– Illustration de l'intérêt d'utiliser opérations algébriques sur les limites

1. Calculer la limite en 2 du numérateur puis celle du dénominateur dans  $f(x)$
2. Retrouver ainsi le résultat.

# Continuité - Dérivabilité

## Continuité

### Définition : continuité en un point

Soit  $f$  une fonction définie sur  $D \subset \mathbb{R}$  et  $a \in D$ .  
 $f$  est continue en  $a$  si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

c'est à dire si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in D, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \epsilon$$

### Exercice 3 : continuité de la fonction inverse en 1

On pose  $f(x) = 1/x$  pour  $x > 0$ .

1. Représenter  $f$  au voisinage de 1.
2. Traduire la définition 4 sans utiliser le symbole de valeur absolue.
3. Prendre  $\epsilon$  quelconque puis déterminer graphiquement une valeur de  $\alpha$  qui convienne.
4. En résolvant une inéquation, déterminer une expression de  $\alpha$  en fonction de  $\epsilon$ .
5. Retrouver ce résultat par le calcul et conclure quant à la continuité de  $f$  en 1.

### Exercice 4 : un cas de discontinuité

Soit  $k$  un réel. On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f \left| \begin{array}{l} f(x) = e^{-x+3} + k \quad \text{sur } ]-\infty, 3[ \\ f(x) = 2 + \sqrt{x-3} \quad \text{sur } [3, +\infty[ \end{array} \right.$$

1. Représenter  $f$  pour  $k = 2$ .  $f$  est-elle continue en 3 ?
2. Déterminer graphiquement  $k$  pour que  $f$  le soit.  
*On utilise désormais cette valeur de  $k$ .*
3. En reprenant la définition, déterminer graphiquement une valeur de  $\alpha$  pour  $\epsilon = 0, 1$ .
4. Généraliser en déterminant une valeur de  $\alpha$  satisfaisante en fonction de  $\epsilon$ .

## Dérivabilité

### Définition : dérivabilité en un point

Soit  $f$  définie sur  $D \in \mathbb{R}$  et  $a \in D$ .

$$f \text{ dérivable en } a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Remarques :

- Cette définition suppose que la limite, lorsque  $x$  tend vers  $a$ , du taux d'accroissement  $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$  existe et est finie. Dans ce cas, on appelle cette limite nombre dérivé en  $a$  et on note  $f'(a)$ .

- Le taux d'accroissement s'interprète géométriquement comme le coefficient directeur d'une sécante à la courbe de  $f$  passant par les points  $A(a, f(a))$  et  $M(x, f(x))$ . Ainsi la limite en  $a$  de ce taux (si elle existe) devient le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse  $a$  de la courbe de  $f$ .
- On peut donc considérer qu'une fonction  $f$  est dérivable en  $a$  si on peut définir une tangente à la courbe de  $f$  en  $a$  (la limite du taux d'accroissement existe) et que cette tangente n'est pas verticale (sinon la limite est infinie).

### Exercice 5

Etudier la dérivabilité de  $f$  dans chacun des cas suivants. On représentera, si c'est possible, la tangente au point proposé.

1.  $f(x) = x^2$  en 1

2.  $f(x) = \ln(x)$  en 1

3.  $f(x) = \exp(x)$  en 0

4.  $f(x) = \cos(x)$  en 0

5.  $f(x) = \sin(x)$  en 0

6.  $f(x) = \tan(x)$  en 0

7.  $f(x) = |x|$  en 0

8.  $f(x) = \sqrt{x}$  en 0

## Fonctions équivalentes

### Définition

Soient  $f$  et  $g$  définies sur  $D$  partie de  $\mathbb{R}$ . Soit  $a \in D$ .

On suppose que pour tout  $x$  dans un voisinage de  $a$  on a  $f(x) = g(x) \times h(x)$ .

Si  $\lim_a h = 1$ , on dit que  $f$  et  $g$  sont équivalentes au voisinage de  $a$  et on note  $f \sim_a g$ .

### Remarques

- $f \sim_a g$  et  $\lim_a g = \lambda \Rightarrow \lim_a f = \lambda$ .
- $f \sim_a 0 \Rightarrow f$  est nulle au voisinage de  $a$ .
- Si  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ,  $f \sim_a \lambda \Leftrightarrow \lim_a f = \lambda$ .
- On montre que

$$\left. \begin{array}{l} f_1 \sim_a g_1 \\ f_2 \sim_a g_2 \end{array} \right\} \Rightarrow f_1 f_2 \sim_a g_1 g_2$$

Ainsi, comme

$$f \text{ dérivable en } a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a),$$

si  $f'(a) \neq 0$ , on peut encore écrire que :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \sim_a f'(a)$$

or  $x - a \sim_a x - a$  donc

$$f(x) - f(a) \sim_a (x - a)f'(a)$$

### Exercice 1

1. Déterminer un équivalent de  $f(x)$  en 0 dans chacun des cas suivants :
  - $f(x) = e^x$
  - $f(x) = \sin x$
  - $f(x) = \tan x$
  - $f(x) = \sqrt{1+x}$
2. Déterminer un équivalent de  $\ln(1+x)$  en 0
3. Peut-on déterminer un équivalent de  $1 - \cos x$  en 0 de cette manière ?
  - Exprimer  $1 - \cos x$  en fonction de  $\sin \frac{x}{2}$
  - En déduire l'équivalent recherché
  - Vérifier sur poste

### Exercice 2

Calculer les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan x}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x+4}-2}$
3.  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \tan x}{\cos 2x}$
4.  $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\sin x - \sin e}{\ln x - 1}$
5.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

### Exercice 3

On se pose la question de savoir si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

$$P_1 : u_n \sim_{\infty} v_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$$

$$P_2 : u_n \sim_{\infty} v_n \Rightarrow f(u_n) \sim_{\infty} f(v_n)$$

$$P_3 : \begin{cases} u_n \sim_{\infty} v_n \\ x_n \sim_{\infty} y_n \end{cases} \Rightarrow (u_n + x_n) \sim_{\infty} (v_n + y_n)$$

A partir de contre-exemples, montrer que ces propositions sont fausses.

On pourra par exemple, s'aider des suites suivantes :

$$(n^2 + n), (n^2 - n), (e^{n^2}), \dots$$

### Exercice 4

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} - \{-1\}$  par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 5}{(x + 1)^2}$$

1. Représenter graphiquement  $f$ .
2. Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son domaine de définition.
3. Rechercher un équivalent de  $f$  en l'infini.
4. Montrer que la courbe de  $f$  possède une asymptote oblique. En déterminer l'équation.
5. Etudier les variations de  $f$ .
6. Définir et représenter la tangente au point d'abscisse  $a$  de la courbe de  $f$ . Le point sera modifiable au clavier et on notera  $T$  la fonction affine dont la courbe est la tangente en question.
7. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{T(x)}$$

8. En déduire un équivalent de  $f$  au voisinage de  $a$ .

### Exercice 5

Déterminer un équivalent de la suite proposée dans chacun des cas suivants :

1.  $u_n = n^2 + n$

2.  $u_n = n^3 + 3^n$

3.  $u_n = \frac{3^n + n^3}{4^n + n^4}$

4.  $u_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$

5.  $u_n = \frac{n^3 - 2n + 1}{\pi \sqrt{2n + 7}}$

6.  $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n}}$

# Développements limités

## Rappels

### Formules de Taylor

- Formule de Taylor Lagrange

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f$  de classe  $C^{n+1}$  sur  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $a \in I$ .

$$\forall x \in I \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(C_x)$$

où  $C_x$  est un réel compris entre  $a$  et  $x$ .

- Formule de Taylor Young

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f$  de classe  $C^n$  sur  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $a \in I$ .

$$\forall x \in I \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^n \epsilon(x-a)$$

où  $\lim_0 \epsilon = 0$

### Remarques

- On peut écrire la formule de Taylor Young sous la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

où  $x \rightarrow o((x-a)^n)$  est une fonction négligeable devant la fonction  $x \rightarrow (x-a)^n$ .

- En 0 (cas le plus utilisé), la formule de Taylor Young s'écrit :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

## Développements limités

1. Développement au voisinage de 0

### Définition

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .  $f$  est fonction définie sur  $D$  partie de  $\mathbb{R}$ ,  $0 \in D$  ou 0 borne de  $D$ .

On dit que  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en 0 si et seulement si

$$\forall x \in D \quad f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$$

2. Propriétés

- $f$  admet un DL<sub>0</sub> en 0  $\Leftrightarrow f$  est continue en 0.
- $f$  admet un DL<sub>1</sub> en 0  $\Leftrightarrow f$  est dérivable en 0.

### Exercice 1

Retrouver les développements limités en 0 des fonctions suivantes :

- |                        |                             |
|------------------------|-----------------------------|
| (a) $f(x) = 1/(1 - x)$ | (e) $f(x) = \tan x$         |
| (b) $f(x) = e^x$       | (f) $f(x) = \sqrt{1 + x}$   |
| (c) $f(x) = \sin(x)$   | (g) $f(x) = (1 + x)^\alpha$ |
| (d) $f(x) = \cos(x)$   | (h) $f(x) = \ln(1 + x)$     |

3. Opérations sur les développements limités : produit, composition, primitive.

Nous voyons ici que la façon d'obtenir le DL d'une fonction produit à partir d'un DL de chacun des termes du produit, effectuer une composition sur un DL ou obtenir le DL d'une fonction à partir de celui de sa dérivée.

**Exercice 2**

(a) Produit

Retrouver un  $DL_3$  de  $x \mapsto e^x \sin x$  à partir de ceux de  $x \mapsto e^x$  et de  $x \mapsto \sin x$ . Comparer au résultat fourni directement par le logiciel.

(b) Composition

Déterminer à partir du développement limité de  $x \mapsto 1/(1 - x)$  celui de  $x \mapsto 1/(1 + x)$  puis de  $x \mapsto 1/(1 + x^2)$ .

(c) Primitive

Retrouve ainsi un développement limité de  $x \mapsto \arctan x$ .

4. Applications des développements limités

**Exercice 3 : étude locale d'une fonction**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $] - 1, 0[ \cup ] 0, +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{\ln(1 + x) - x}{x^2}$$

- (a) Etudier la limite de  $f$  en 0 et montrer que l'on peut prolonger par continuité  $f$  en 0.
- (b) Etudier la dérivabilité en 0 de la fonction  $f$  ainsi prolongée.
- (c) Déterminer la tangente en 0 et étudier la position de la courbe de  $f$  par rapport à cette tangente.

# Intégration

## 1 Rappels sur l'intégration de Riemann

On considère un segment  $[a, b]$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bornée.

On rappelle quelques résultats et définitions :

–  $S = (s_0, s_1, \dots, s_n)$  est une subdivision de  $[a, b]$  si

$$a = s_0 < s_1 < \dots < s_n = b.$$

Le pas de la subdivision est le nombre  $\Delta(S) = \max_{1 \leq k \leq n} (s_k - s_{k-1})$ . C'est donc le plus grand écart entre deux points consécutifs de la subdivision.

– Les quantités

$$\begin{cases} \sigma(f, S) &= \sum_{k=1}^n (s_k - s_{k-1}) \inf_{[s_{k-1}, s_k]} f \\ \Sigma(f, S) &= \sum_{k=1}^n (s_k - s_{k-1}) \sup_{[s_{k-1}, s_k]} f \end{cases}$$

sont appelées sommes de Darboux inférieure et supérieure de  $f$  pour la subdivision  $S$ .

– L'ensemble des sommes de Darboux inférieures admet une borne supérieure que l'on peut noter par exemple  $\sup \sigma$  et l'ensemble des sommes de Darboux supérieures admet une borne inférieure que l'on notera  $\inf \Sigma$ .

– Une fonction  $f$  est dite Riemann intégrable si  $\sup \sigma = \inf \Sigma$  auquel cas cette valeur sera notée  $\int_a^b f(x) dx$  et appelée intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$ .

– Si on considère une fonction  $f$  Riemann intégrable sur  $[a, b]$  et si on considère une subdivision  $\Delta(S)$  de  $[a, b]$ , alors l'intégrale  $\int_a^b f(x) dx$  est la limite quand  $\Delta(S) \rightarrow 0$  des sommes de Riemann

$$\sum_{k=1}^n (s_k - s_{k-1}) f(\xi_k),$$

où  $\xi_k$  est un point quelconque de l'intervalle  $[s_{k-1}, s_k]$ .

Des sommes de Riemann classiques :

– En prenant une subdivision régulière de l'intervalle  $[a, b]$  on obtient la somme de Riemann :

$$\sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f(\xi_k) \text{ et } \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f(\xi_k)$$

– si on choisit le point  $\xi_k$  à la fin de chaque intervalle ainsi formé cette somme devient :

$$\sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} \times f\left(a + \frac{b-a}{n} k\right) \text{ avec toujours } \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} \times f\left(a + \frac{b-a}{n} k\right)$$

– et dans le cas particulier classique où  $a = 0$  et  $b = 1$ , cette dernière formule s'écrit

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ et } \int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

– Relation de Chasles : Soit  $c \in ]a, b[$ .  $f$  est Riemann intégrable sur  $[a, b]$  si et seulement si  $f$  est Riemann intégrable sur  $[a, c]$  et sur  $[c, b]$  et dans ce cas on a

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

- Exemples de fonctions Riemann intégrables :
  - Une fonction Riemann intégrable est bornée par hypothèse.
  - Toute fonction monotone bornée sur  $[a, b]$  est Riemann intégrable.
  - Toute fonction monotone par morceaux est Riemann intégrable.
  - Toute fonction continue sur  $[a, b]$  est Riemann intégrable.

## 2 Création d'une subdivision régulière de l'intervalle

En prenant  $a$  et  $b$  et  $n$  modifiables au clavier, définir une subdivision régulière de l'intervalle  $[a, b]$  en  $n + 1$  valeurs  $s_0 = a, \dots, s_n = b$ .

## 3 Calcul des sommes de Darboux sur un exemple

On prend dans cette partie l'exemple de la fonction exponentielle entre 0 et 1.

1. Définir la somme de Darboux inférieure associée à la subdivision précédente. Calculer cette somme pour  $n = 10$ .
2. Même travail pour la somme de Darboux supérieure.
3. En augmentant la valeur de  $n$  définie au départ, vérifier que les deux sommes semblent converger vers la même valeur.

## 4 Une somme de Riemann

En poursuivant le même exemple, calculer la somme de Riemann où le point est choisi au milieu de chaque intervalle. Cette méthode s'appelle la méthode du point médian.

## 5 Exercices

- En utilisant des sommes de Riemann, calculer  $\int_0^1 x^2 dx$ .
- Même exercice pour  $\int_0^\pi \sin(t) dt$ .
- Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^5 + 2^5 + \dots + n^5}{n^6}$$

## 6 Calculs d'intégrales par changement de variable

On rappelle le théorème de changement de variable :

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  avec  $\varphi([\alpha, \beta]) \subseteq [a, b]$ , alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

### Exercice

Calculer  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ .

## 7 Comparaison de suites et d'intégrales

### Exercice

On considère la suite  $u$  définie pour  $n \geq 1$  par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

1. Déterminer en utilisant le logiciel un équivalent de  $u_n$ .
2. Retrouver ce résultat en comparant  $u_n$  à des intégrales.

### Exercice

On considère maintenant la suite  $v$  définie pour  $n \geq 1$  par

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

Montrer qu'elle est convergente.