UEO-pro Préparation au concours PE
Université Rennes 2
Mathématiques - Travaux dirigés

Eléments de base en arithmétique

Divisibilité

Définition : Soit a et b deux entiers relatifs. On dit que a divise b (ou que b est un multiple de a) s'il existe un entier k tel que $b = a \times k$. On note $a|b$.
Remarque : La définition, tout comme les quelques propriétés qui vont suivre sont écrites pour des entiers relatifs. Une approche possible pour s'approprier ces éléments est de considérer dans un premier temps des entiers naturels avant d'étendre.

Propriétés :

1. $a|b$ et $b|c \Rightarrow a|c$
2. $a|b$ et $b|a \Rightarrow |a| = |b|$
3. $a|b \Rightarrow a|bc$
4. $a|b$ et $a|c \Rightarrow a|(b+c)$
5. $a|b$ et $a|c \Rightarrow a|(b-c)$
6. $a|b$ et $a'|b' \Rightarrow aa'|bb'$

Exercices

1. Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse (extraits des concours 2016 ou 2017)
   - Pour n'importe quel nombre entier n, $(n+2)^2 - (n-2)^2$ est un multiple de 8.
   - Pour n'importe quel nombre entier n, $(n+2)^2 - (n-2)^2$ est un multiple de 32.
   - Il existe au moins un nombre entier pair, supérieur à 7, divisible par 3 mais divisible ni par 9 ni par 4.
   - Pour obtenir le carré d'un nombre entier, il suffit de multiplier le nombre entier qui le précède par le nombre entier qui le suit puis d'ajouter 1.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, l'entier $n(n+1)$ est pair.
3. Le produit de deux entiers impairs est-il toujours un nombre impair ?
4. Montrer que pour tout entier naturel n, l'entier $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6.
5. Quels entiers naturels vérifient $(n^2+1)|n$?
6. Quels sont les entiers naturels tels que $n|(n+7)$?
7. Montrer que si n est la somme des carrés de deux entiers consécutifs, alors $2n-1$ est le carré d'un entier.
8. On se propose de montrer la réciproque de la propriété précédente. En guise d'aide, utiliser (et montrer si nécéssaire) les résultats suivants
   - Formuler la proposition à démontrer.
   - Montrer que pour tout nombre x (entier ou non),
   $$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 = \frac{x^2+1}{2}$$
   - Vérifier que si $2n-1$ est le carré d'un entier k alors k est nécéssairement impair.
   - Vérifier que si $2n-1$ est le carré d'un entier k alors n vérifie
   $$n = \frac{k^2+1}{2}$$

Division Euclidienne

Théorème : Soit a et b deux entiers avec $b \geq 1$. Alors il existe un unique couple d'entiers (q, r) tels que
- $a = b \times q + r$;
- $0 \leq r \leq b - 1$.

Les entiers q et r s'appellent respectivement le quotient et le reste de la division Euclidienne de a par b.

Applications directes : Effectuer la division Euclidienne de a par b avec
- $a = 25$ et $b = 7$.
- $a = -25$ et $b = 7$.

Exercices

1. Soit a et b deux entiers. On effectue la division de a par 7 et l'on trouve 3 comme reste. En effetuant la division Euclidienne de b par 7, on trouve 4 comme reste. Indiquer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse, en justifiant la réponse (extraits du concours 2016) : $a + b$ est divisible par 7.
2. Déterminer les entiers positifs a et b sachant que $a < 4000$ et que la division euclidienne de a par b donne un quotient de 82 et un reste de 47. (Aide : commencer par minorer b)
3. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $2^{2013} + 562$ par 4.
4. Quand on divise un nombre par 12, le reste est 8. Quand on divise ce même nombre par 10, on augmente le quotient de 1 et le reste devient 2. Quel est ce nombre ?
5. Démontrer que sur la droite d'équation $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$, il n'y a aucun point à coordonnées entières.

PGCD et algorithme d'Euclide

Il peut être utile de connaitre le plus grand diviseur commun à deux entiers en particulier pour simplifier des fractions. Par exemple, savoir que le PGCD de 364 et 154 est 14 permet d'écrire

$$\frac{154}{364} = \frac{154/14}{364/14} = \frac{11}{26}$$

et de savoir que la fraction résultat n'est plus simplifiable.

Pour connaitre le PGCD de 2 nombres, une possibilité est de dresser la liste des diviseurs de chacun d'entre eux, d'en déduire la liste des diviseurs communs puis de choisir le plus grand. On gagne du temps en décomposant les nombres en produits de facteurs premiers :

$$364 = 2 \times 2 \times 7 \times 13 \qquad 154 = 2 \times 7 \times 11$$

Il est alors clair que le plus grand diviseur commun est en effet $2 \times 7 = 14$.

Applications directes

1. Dresser la liste des diviseurs de 364 puis celle de 154.
2. Déterminer le PGCD de 594 et de 495.

Propriété utile : Soit a, b, d, q et r des entiers. On suppose que $a = bq + r$. Alors d divise a et b si et seulement si d divise b et r.

Exercice

Montrer la propriété précédente.

Corrigé

Exercices

1. Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse (extraits des concours 2016 ou 2017)
   - Pour n'importe quel nombre entier n, $(n+2)^2-(n-2)^2$ est un multiple de 8.

     Corrigé Développons :

     $$\begin{aligned}(n+2)^2-(n-2)^2 &= n^2+4n+4-(n^2-4n+4)\\ &= 8n\end{aligned}$$

     et le résultat est bien un multiple de 8.
   - Pour n'importe quel nombre entier n, $(n+2)^2-(n-2)^2$ est un multiple de 32.

     Corrigé Il suffit de remplacer n par 2, ou par 3 pour constater que ce n'est pas le cas.
   - Il existe au moins un nombre entier pair, supérieur à 7, divisible par 3 mais divisible ni par 9 ni par 4.

     Corrigé Egrenons par exemple la suite des multiples de 3 supérieurs, jusqu'à en trouver un qui fonctionne. On trouve très rapidement 30...
   - Pour obtenir le carré d'un nombre entier, il suffit de multiplier le nombre entier qui le précède par le nombre entier qui le suit puis d'ajouter 1.

     Corrigé Autrement-dit, a-t-on, pour tout entier n, $(n-1)(n+1)+1$ est un carré ? Il suffit de vérifier en développant : $(n-1)(n+1)+1=n^2-1+1=n^2$ et on observe que c'est vrai.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, l'entier $n(n+1)$ est pair.

   Corrigé Le produit $n(n+1)$ met en jeu deux entiers consécutifs donc un nombre pair. Ainsi ce produit est un multiple de deux donc un nombre pair.

3. Le produit de deux entiers impairs est-il toujours un nombre impair ?

   Corrigé En effectuant quelques essais, on observe que la propriété a l'air de fonctionner à coup sûr. Vérifions là en envisageant deux nombres impairs $2k+1$ et $2k'+1$. Leur produit est $(2k+1)(2k'+1)=4kk'+2k+2k'+1$. Il s'écrit $2(2kk'+k+k')+1$ ce qui montre qu'il impair.

4. Montrer que pour tout entier naturel n, l'entier $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6.

   Corrigé Il y a dans ces trois nombres consécutifs un multiple de 3, qui est soit pair auquel cas c'est aussi un multiple de 2 donc de 6, soit impair donc entouré de deux nombres pairs ce qui confère au produit la propriété d'être un multiple de 6 en effet.
5. Quels entiers naturels vérifient $(n^2+1)|n$?

Corrigé n^2+1 étant plus grand que n, il ne peut pas en être un diviseur.

6. Quels sont les entiers naturels tels que $n|(n+7)$?

   Corrigé Il faut que n divise $n+7$ or n divise n donc cela implique que n divise 7. Les candidats possibles sont ainsi $n = 1, 2, \dots, 7$ et quand on les balaye, on trouve 1 et 7 comme seuls candidats acceptables.

7. Montrer que si n est la somme des carrés de deux entiers consécutifs, alors $2n-1$ est le carré d'un entier.

   Corrigé On suppose donc qu'il existe un entier k tel que $n = k^2 + (k+1)^2$. On en déduit que $2n-1 = 2\left(k^2+(k+1)^2\right) - 1$, soit
   $$2n-1 = 2\left(2k^2+2k+1\right) - 1 = 4k^2+4k+1 = (2k+1)^2$$
   et $2n-1$ est alors le carré de $2k+1$.

8. On se propose de montrer la réciproque de la propriété précédente. En guise d'aide, utiliser (et montrer si nécéssaire) les résultats suivants
   - Formuler la proposition à démontrer.

     Corrigé La réciproque s'énonce : si $2n-1$ est le carré d'un entier, alors n est la somme des carrés de deux entiers consécutifs.

   - Montrer que pour tout nombre x (entier ou non),
     $$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 = \frac{x^2+1}{2}$$

     Corrigé Il suffit de développer l'expression de gauche puis de simplifier pour arriver au résultat :
     $$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \times \left\{x^2-2x+1+x^2+2x+1\right\} = \frac{x^2+1}{2}$$

   - Vérifier que si $2n-1$ est le carré d'un entier k alors k est nécéssairement impair.

     Corrigé Si k est pair, alors k^2 aussi et k^2 ne peut être égal à $2n-1$ qui est impair : nécéssairement k est un impair.

   - Vérifier que si $2n-1$ est le carré d'un entier k alors n vérifie
     $$n = \frac{k^2+1}{2}$$

     Corrigé C'est immédiat : $2n-1 = k^2 \Leftrightarrow n = (k^2+1)/2$.
     Conclusion : Si $2n-1$ est le carré d'un entier k alors k est impair et est lié à n par la relation $n = (k^2+1)/2$. On en déduit
     $$n = \frac{k^2+1}{2} = \left(\frac{k-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{k+1}{2}\right)^2$$
     qui est bien la somme des carrés de deux entiers consécutifs.

Division Euclidienne

- $a = 25$ et $b = 7$.

  Corrigé $25 = 7 \times 3 + 4$.

- $a = -25$ et $b = 7$.

  Corrigé $-25 = 7 \times (-4) + 3$.

Exercices

1. Soit a et b deux entiers. On effectue la division de a par 7 et l'on trouve 3 comme reste. En effetuant la division Euclidienne de b par 7, on trouve 4 comme reste. Indiquer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse, en justifiant la réponse (extraits du concours 2016) : $a + b$ est divisible par 7.

   Corrigé Traduisons les hypothèses. Il existe q et q' tels que $a = 7q + 3$ et $b = 7q' + 4$. On en déduit $a + b = 7(q + q') + 7 = 7(q + q' + 1)$ et $a + b$ est bien un multiple de 7.

2. Déterminer les entiers positifs a et b sachant que $a < 4000$ et que la division euclidienne de a par b donne un quotient de 82 et un reste de 47. (Aide : commencer par minorer b)

   Corrigé Minorons tout d'abord b :
   $$b = \frac{a - 47}{82} < \frac{4000 - 47}{82} \approx 48,2$$
   ainsi $b \leq 48$. On a par ailleurs $b > 47$ car 47 est le reste de la division. On en déduit que $b = 48$ et par conséquent, $a = 48 \times 82 + 47 = 3936 + 47 = 3983$.

3. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $2^{2013} + 562$ par 4.

   Corrigé $2^{2013} + 562 = 4 \times 2^{2011} + 4 \times 140 + 2 = 4 \times \left(2^{2011} + 140\right) + 2$. Le quotient est $2^{2011} + 140$ et le reste est 2.

4. Quand on divise un nombre par 12, le reste est 8. Quand on divise ce même nombre par 10, on augmente le quotient de 1 et le reste devient 2. Quel est ce nombre ?

   Corrigé Posons a ce nombre. On a $a = 12q + 8$ et $a = 10(q + 1) + 2 = 10q + 12$. La soustraction de ces deux égalités donne $2q = 4$ soit $q = 2$ et l'on déduit $a = 12 \times 2 + 8 = 32$.

5. Démontrer que sur la droite d'équation $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$, il n'y a aucun point à coordonnées entières.

   Corrigé (x, y) vérifie l'équation implique $8y = 6x + 1$. Ainsi, si x et y sont deux entiers, alors on a $8y$ qui est pair est égal à $6x + 1$ qui est impair : contradiction !

PGCD et algorithme d'Euclide

Applications directes

1. Dresser la liste des diviseurs de 364 puis celle de 154.

Corrigé Décomposons les nombres en un produit de facteurs premiers :

$$364 = 2^2 \times 91 = 2^2 \times 7 \times 13 \text{ et } 154 = 2 \times 7 \times 11$$

En combinant les puissances des nombres mis en jeu, on liste l'ensemble des diviseurs demandés.
Pour 364 : 1, 2, 7, 13, 2^2, 2×7, 2×13, $2^2 \times 13$, 7×13, $2^2 \times 7 \times 13$.
Pour 154 : 1, 2, 7, 11, 2×7, 2×11, 7×11, $2 \times 7 \times 11$.

2. Déterminer le PGCD de 594 et de 495.

Corrigé Décomposons les nombres en un produit de facteurs premiers :

$$594 = 2 \times 3^3 \times 11 \text{ et } 495 = 3^2 \times 5 \times 11$$

et $3^2 \times 11 = 99$ est le PGCD de ces deux nombres.

UEO-pro Préparation au concours PE
Université Rennes 2
Mathématiques - Travaux dirigés

Arithmétique - suite

Algorithme d'Euclide

L'algorithme d'Euclide est un algorithme permettant de déterminer le plus grand commun diviseur (PGCD) de deux entiers sans connaître leur factorisation (leur décomposition en produit de facteurs premiers). Il s'appuie sur deux propriétés. La première est la suivante :

Propriété 1 : Soit a, b, d, q et r des entiers. On suppose que $a = bq + r$. Alors d divise a et b si et seulement si d divise b et r.
Ainsi, en particulier, un nombre divise deux entiers a et b si et seulement si il divise le reste de la division Euclidienne de a par b. Il s'ensuit que la PGCD de a et b, qui fait partie de la liste des diviseurs de a et b divise aussi le reste de la division Euclidienne de a par b donc il fait partie de la liste des diviseurs de a, b et r, reste de cette division. Par conséquent, on a

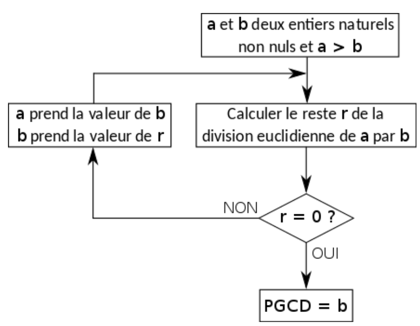
$$\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, r) \text{ avec } r \text{ reste de la division euclidienne de } a \text{ par } b$$

Propriété 2 : Il est par ailleurs clair que pour tout entier a,

$$\text{PGCD}(a, 0) = a.$$

En effet, tout entier est un diviseur de 0 donc le plus grand diviseur commun entre 0 et a lui-même est a.

Voici une schématisation de l'algorithme d'Euclide :



Applications

1. Calculer $\text{PGCD}(a, b)$ dans les cas suivants :
   - $a = 230$, $b = 126$
   - $a = 390$, $b = 720$
   - $a = 112$, $b = 39$
2. Simplifier si possible les fractions suivantes :

$$\frac{1045}{462} \qquad \frac{84}{238} \qquad \frac{195}{176}$$

3. Quels sont les diviseurs communs à 390 et 525 ?

Nombres premiers - Nombres premiers entre eux

Nombre premier : Un nombre entier est dit premier s'il n'admet pas d'autre diviseur que 1 et lui-même. Noter que tous les nombres entiers ont la propriété d'être divisible par 1 et eux-mêmes. Les nombres premiers sont sont qui n'admettent pas d'autre diviseur.

Nombres premiers entre eux : Deux nombres sont dits premiers entre eux si leur plus grand diviseur commun est 1. Noter cette fois que deux nombres ont toujours 1 comme diviseur commun. La particularité des nombres premiers entre eux est qu'ils n'en ont pas d'autres (sinon leur PGCD serait supérieur à 1).

Exercices

1. Soit n un entier positif. Montrer que le nombre $n^2 + 2n - 3$ n'est jamais un nombre premier.
2. Soit n un entier. On note $n!$ (et on dit factorielle n) le nombre

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$$

   - Montrer, que quelque soit l'entier n, les nombres suivants ne peuvent pas être premiers :

$$n! + 2, n! + 3, \ldots, n! + n$$

   - En déduire que pour tout entier n, il existe $n - 1$ entiers consécutifs non premiers.
3. Les nombres suivants sont ils premiers entre eux ?

$$a = 21 \text{ et } b = 45 \qquad a = 39 \text{ et } b = 65$$

4. On cherche à montrer que $3^{123} - 5$ et 25 sont premiers entre eux.
   - Soit $d = \text{PGCD}(3^{123} - 5, 25)$. Pourquoi d ne peut être égal qu'à 1, 5 ou 25 ?
   - Est ce que 5 est un diviseur possible de 3^{123} ? de $3^{123} - 5$?
   - Conclure.

Changements de base

1. Combien vaut le nombre qui s'écrit 10011 en base 2 ?
2. Combien vaut le nombre qui s'écrit 112 en base 3 ?
3. Ecrire le nombre 13 en base 2, puis en base 3 puis en base 7.

Corrigé

Algorithme d'Euclide

1. Calculer PGCD(a, b) dans les cas suivants :
   - $a = 230$, $b = 126$

     Corrigé On déroule l'algorithme

     $$\text{PGCD}(230, 126) = \text{PGCD}(126, 104) = \text{PGCD}(104, 22) = \text{PGCD}(22, 16) = \text{PGCD}(16, 6) = \text{PGCD}(6, 4) = 2$$

   - $a = 390$, $b = 720$

     Corrigé On déroule l'algorithme

     $$\text{PGCD}(720, 390) = \text{PGCD}(390, 330) = \text{PGCD}(330, 60) = \text{PGCD}(60, 30) = 30$$

   - $a = 112$, $b = 39$

     Corrigé On déroule l'algorithme

     $$\text{PGCD}(112, 39) = \text{PGCD}(39, 34) = \text{PGCD}(34, 5) = \text{PGCD}(5, 4) = 1$$

2. Simplifier si possible les fractions suivantes :

   $$\frac{1045}{462} \qquad \frac{84}{238} \qquad \frac{195}{176}$$

   Corrigé Dans chaque cas, cherchons le PGCD des nombres concernés.

   $$\text{PGCD}(1045, 462) = \text{PGCD}(462, 121) = \text{PGCD}(121, 99) = \text{PGCD}(99, 22) = 11$$

   Ainsi $\frac{1045}{462} = \frac{95}{42}$.

   $$\text{PGCD}(238, 84) = \text{PGCD}(84, 70) = \text{PGCD}(70, 14) = \text{PGCD}(14, 0) = 14$$

   Ainsi $\frac{84}{238} = \frac{6}{17}$.

   $$\text{PGCD}(195, 176) = \text{PGCD}(176, 19) = 1$$

   Ainsi $\frac{195}{176}$ n'est pas simplifiable.

3. Quels sont les diviseurs communs à 390 et 525 ?

   Corrigé Cherchons le PGCD de ces deux nombres

   $$\text{PGCD}(525, 390) = \text{PGCD}(390, 135) = \text{PGCD}(135, 120) = \text{PGCD}(120, 15) = \text{PGCD}(15, 0) = 15$$

   Les diviseurs communs sont 1,3,5 et 15.

Nombres premiers - Nombres premiers entre eux

Exercices

1. Soit n un entier positif. Montrer que le nombre $n^2 + 2n - 3$ n'est jamais un nombre premier.

Corrigé Transformons l'écriture de ce nombre : $n^2 + 2n - 3 = (n+1)^2 - 4 = (n+2)(n-2)$. Il s'écrit sous la forme d'un produit de deux nombres autres que 1 et lui-même donc n'est pas premier.

2. Soit n un entier. On note $n!$ (et on dit factorielle n) le nombre

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$$

- **L'énoncé initial comportait une erreur.** En effet $n! + 1$ peut être premier, par exemple pour $n = 3$. L'énoncé modifié est le suivant :
  Montrer, que quelque soit l'entier n, les nombres suivants ne peuvent pas être premiers :

$$n! + 2, n! + 3, \ldots, n! + n$$

  Corrigé Il suffit de factoriser par 2, puis 3,..., puis n.

- En déduire que pour tout entier n, il existe $n-1$ entiers consécutifs non premiers.

  Corrigé Pour tout n, il suffit de considérer les $n-1$ nombres $n! + 2, n! + 3, \ldots, n! + n$ qui ne sont pas premiers.

3. Les nombres suivants sont ils premiers entre eux ?

$$a = 21 \text{ et } b = 45 \qquad a = 39 \text{ et } b = 65$$

Corrigé La réponse est non pour les deux premiers car 3 est un multiple commun évident. Dans l'autre cas, comme $a = 3 \times 13$ et que $b = 13 \times 5$, la réponse est encore non.

4. On cherche à montrer que $3^{123} - 5$ et 25 sont premiers entre eux.
   - Soit $d = \text{PGCD}(3^{123} - 5, 25)$. Pourquoi d ne peut être égal qu'à 1, 5 ou 25 ?
   - Est ce que 5 est un diviseur possible de 3^{123} ? de $3^{123} - 5$?
   - Conclure.

Corrigé d ne peut être égal qu'à 1 (comme toujours), 5 ou 25 qui sont les diviseurs du plus petit des deux. 5 ne divise pas 3^{123} dont les seuls diviseurs sont des multiples de 3. Il ne divise pas non plus $3^{123} - 5$ car il faudrait qu'il divise 3^{123} pour cela. Si 5 ne divise pas $3^{123} - 5$, aucune chance que 25 le fasse. Finalement le seul diviseur commun est 1 ce qui répond au problème posé.

Changements de base

1. Combien vaut le nombre qui s'écrit 10011 en base 2 ?

Corrigé Il s'agit du nombre

$$1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^4 = 19$$

2. Combien vaut le nombre qui s'écrit 112 en base 3 ?

Corrigé Il s'agit du nombre

$$2 \times 3^0 + 1 \times 3^1 + 1 \times 3^2 = 14$$

3. Ecrire le nombre 13 en base 2, puis en base 3 puis en base 7.

Corrigé comme $13 = 8 + 4 + 1 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^0$, le nombre 13 s'écrit 1101 en base 2. Par ailleurs $13 = 9 + 3 + 1 = 3^2 + 3^1 + 3^0$ donc 13 s'écrit 111 en base 3. Enfin $13 = 7 + 6 = 1 \times 7^1 + 6 \times 7^0$ donc en base 7, 13 s'écrit 16.

UEO-pro Préparation au concours PE
Université Rennes 2
Mathématiques - Travaux dirigés

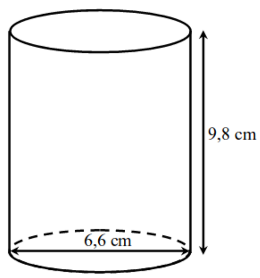
Géométrie

Le texte ici proposé est un extrait du sujet du concours du groupement académique 2 donné en 2018.

Dans l'exercice, on cherche à optimiser la quantité de métal nécessaire à la fabrication de canettes de 33 centilitres (cL).

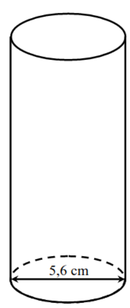
Partie A : canette "classique"

On modélise une "canette classique" par le cylindre de révolution représenté ci-dessous. Le volume d'un tel cylindre s'obtient en multipliant l'aire de sa base par sa hauteur. Vérifier que le volume de ce cylindre, de diamètre $6,6\,\text{cm}$ et de hauteur $9,8\,\text{cm}$, est supérieur à 33 cL.



Partie B : canette "slim"

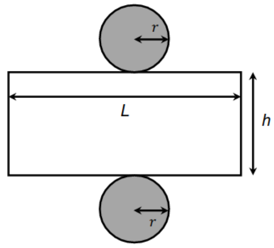
Un nouveau format de canette est apparu dernièrement sur le marché. Ces canettes allongées, dites "slim", sont plus hautes et plus fines que les précédentes, pour une même contenance. Le cylindre représenté ci-dessous en modélise une. Son diamètre est de $5,6\,\text{cm}$. Déterminer au millimètre près la plus petite hauteur possible du cylindre pour que la canette contienne au moins 33 cL.



Partie C : Lien entre le rayon de la base d'une canette et l'aire de son patron

On appelle r le rayon, en centimètre, de la base du cylindre modélisant une canette de 33 cL et h sa hauteur, en centimètre.

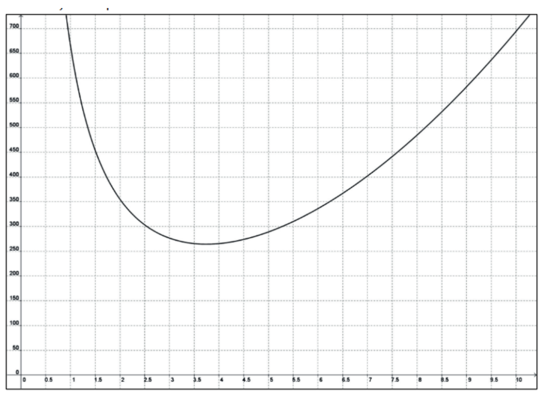
1. Vérifier que $h = \frac{330}{\pi r^2}$.
2. La figure ci-dessous représente le patron du cylindre. Celui-ci est formé de deux disques, et d'un rectangle de largeur h et de longueur L, exprimée en centimètre. Exprimer la longueur L en fonction de r.



3. Vérifier que l'aire, en centimètre carré, de la partie rectangulaire du patron est $\frac{660}{r}$.
4. Exprimer l'aire totale $\mathcal{A}$ du patron du cylindre, en centimètre carré, en fonction de r.

Partie D : Lecture graphique

On s'intéresse à la réalisation d'un cylindre de révolution de base de rayon r, exprimé en cm, et de contenance 33 cL. L'aire exprimée en cm^2 de la surface de métal nécéssaire est modélisée par la fonction f qui, à tout nombre réel r associe $f(r) = 2\pi r^2 + \frac{660}{r}$. La fonction est représentée ci-dessous :



1. Quelle est l'aire de la surface de métal nécessaire pour un cylindre dont la base a pour rayon 1,5cm ?
2. A quelle(s) valeur(s) du rayon du cylindre correspond une aire de 300cm^2 ?
3. Déterminer laquelle de la canette "classique" ou de la canette "slim" utilise le moins de surface de métal pour sa réalisation. Justifier la réponse en donnant les lectures graphiques effectuées.
4. A quelle valeur du rayon correspond la surface minimale de métal nécessaire à la fabrication d'une canette de 33cL ?

Partie E

Les canettes sont fabriquées à partir d'une feuille plane de tôle d'aluminium d'épaisseur 130 micromètres (μm). Un micromètre est égal à un millionième de mètre. La masse volumique de l'aluminium est 2700 kg/m^3. On s'intéresse aux canettes classiques dont le rayon est de 3,3cm et dont la surface de métal nécessaire est de 268,42 cm^2. On admet que l'anneau pour ouvrir la canette et le rivet de liaison entre l'anneau et le couvercle ont une masse de 1,4 g et que la masse d'aluminium nécessaire pour souder le couvercle au reste de la canette est 1,9 g.

1. Déterminer, au dixième de gramme près, la masse d'aluminium nécessaire pour fabriquer une canette classique.
2. Il faut 9 kg d'aluminium pour fabriquer un certain type de vélo. Estimer le nombre de cannettes classiques nécessaires pour obtenir l'aluminium pour fabriquer un tel vélo.

Corrigé

Partie A : canette "classique"

L'aire de base est $\pi \times R^2$, ainsi le volume est $V = \pi \times R^2 \times h$. Sachant que $\pi > 3,14$, on minore le volume exprimé en cm^3 par

$$V > 3,14 \times 3,3^2 \times 9,8 = 335,1071$$

Le volume est ainsi supérieur à $330\,\text{cm}^3$ soit 33cL.

Partie B : canette "slim"

Exprimons tout en cm. Il s'agit de déterminer la hauteur h telle que $\pi R^2 h \geq 330$. Résolvons cette inéquation :

$$\pi R^2 h \geq 330 \Leftrightarrow h > \frac{330}{\pi \times 2,8^2} \approx 13,398$$

Ainsi, pour $h = 13,4\,\text{cm}$, on a bien la contenance voulue.

Partie C : Lien entre le rayon de la base d'une canette et l'aire de son patron

1. On exprime le volume en fonction des grandeurs en présence : $V = \pi r^2 h$. Il vient, en isolant h dans cette égalité $h = \frac{V}{\pi r^2}$. Le volume étant 33 cL $= 330\text{cm}^3$, on a bien, avec des grandeurs exprimées en cm, $h = \frac{330}{\pi r^2}$.
2. La longueur L correspond au périmètre du cercle : $L = 2\pi r$.
3. L'aire rectangulaire est $L \times h$. En utilisant les deux égalités précédentes, elle s'écrit

$$L \times h = 2\pi r \times \frac{300}{\pi r^2} = \frac{660}{r}.$$

4. L'aire totale $\mathcal{A}$ est l'aire de la partie rectangulaire à laquelle on ajoute deux fois l'aire du disque :

$$\mathcal{A} = \frac{660}{r} + 2\pi r^2.$$

Partie D : Lecture graphique

1. Il s'agit de calculer $f(1,5) \approx 454,1\,\text{cm}^2$.
2. On est amené à résoudre $f(r) = 300$. Par lecture graphique, on obtient $r \approx 2,5\,\text{cm}$ ou $r \approx 5,3\,\text{cm}$.
3. Pour une classique, le rayon est $r = 3,3\,\text{cm}$ et pour une slim 2,8cm. Sur cette partie la fonction f est décroissante, l'aire est donc inférieure lorsque le rayon est le plus grand donc pour la canette classique.
4. Il s'agit de lire quel est le rayon associé à l'aire minimale donc lire l'abscisse du minimum sur la courbe : $r \approx 3,7\,\text{cm}$.

Partie E

1. Calculons tout d'abord la masse nécessaire à la fabrication de la partie cylindrique. La surface mesure $268,42\,\text{cm}^2$ soit $268,42 \times 10^{-4}\,\text{m}^2$ et l'épaisseur des feuilles de tôle est $130 \times 10^{-6}\,\text{m}$. Ainsi, le volume de métal nécessaire est $V = 268,42 \times 10^{-4} \times 130 \times 10^{-6}\,\text{m}^3 = 268,42 \times 130 \times 10^{-10}\,\text{m}^3 = 34894,6 \times 10^{-10}\,\text{m}^3$. Ainsi, la masse de la partie cylindrique est, en kg, $34894,6 \times 10^{-10} \times 2700 = 0,009421542$ soit 9,421542 g. On ajoute la masse des autres composants pour un total 12,72154 g. Arrondi au dixième, la masse totale d'une canette est 12,7 g.
2. Un vélo nécessite 9 kg de métal soit l'équivalent de $9000/12,72154 \approx 708$ canettes.